
3

Exponenten en logaritmen

3.1	Exponentiële groei	2
3.2	Exponentiële functies	12
3.3	Het begrip logaritme	20
3.4	Logaritmische functies	27
3.5	Logaritmische schalen	34
3.6	Totaalbeeld	43

3.1 Exponentiële groei

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- werken met exponentiële groei en de bijbehorende groeifactor, groeifactoren omrekenen;
- lineaire groei en exponentiële groei vergelijken;
- formules opstellen voor lineaire en exponentiële groei.

Voorkennis

- werken met lineaire en exponentiële groei;
- de rekenregels voor machten gebruiken;
- tabellen maken en grafieken tekenen bij formules van twee variabelen.

Verkennen

Opgave V1

Kuala Lumpur is de hoofdstad van Maleisië en had in januari 2005 ongeveer 9,5 miljoen inwoners. Dit aantal groeide toen met een vast percentage van 4,5 % per jaar.

- a In welk jaar zal het aantal inwoners van Kuala Lumpur zijn verdubbeld als de groei zo doorzet?
- Noem het aantal inwoners in miljoenen A en laat t de tijd in jaren na 2005 zijn.
- b Welke formule kun je opstellen voor de groei van de bevolking van Kuala Lumpur?
- c Hoe ziet de bijbehorende grafiek er uit?



Figuur 3.1

Uitleg

Er zijn landen waarin de voetbalsport nog maar weinig beoefenaren kent, maar waarin die sport wel in opkomst is.

Stel dat in zo'n land A vanaf 1998 het aantal leden van voetbalclubs jaarlijks met 15000 is toegenomen. Op 1 januari 2010 waren er 200000 leden. Neem aan dat deze groei ongewijzigd door gaat. Het aantal leden op 1 januari 2015 is dan $200000 + 15000 \cdot 5 = 275000$. In dit geval is er sprake van lineaire groei, er komt jaarlijks een vast aantal leden bij.

In een andere opkomende voetbalnatie B neemt het aantal leden van voetbalclubs jaarlijks met 5% toe. Op 1 januari 2010 waren er 200000 leden. Neem aan dat deze groei ongewijzigd door gaat. Op 1 januari 2015 heeft dit land dan $200000 \cdot 1,05^5 \approx 255256$, dus ongeveer 255000 leden. Nu spreek je van exponentiële groei met een beginhoeveelheid van 200000 en een groeifactor van 1,05 per jaar.

Je kunt voor beide manieren van groei formules en grafieken opstellen. Je noemt dan A het aantal leden in land A, B het aantal leden in land B en t de tijd in jaren na 2010.



Opgave 1

Bekijk in de [Uitleg op pagina 2](#) de groei van het aantal leden van voetbalclubs.

- Welke formule kun je opstellen voor A afhankelijk van t ?
- Bereken het aantal leden van voetbalclubs in A in 2020 als de lineaire groei zo door blijft gaan.
- Stel een formule op voor B afhankelijk van t .
- Bereken het aantal leden van voetbalclubs in B in 2020 als de exponentiële groei zo door blijft gaan.
- In B groeit het aantal leden van voetbalclubs met 5% per jaar.
Hoeveel procent per maand is dat?

Opgave 2

Bekijk opnieuw de groei van het aantal leden van voetbalclubs. Gebruik de formules bij de vorige opgave. Ga er van uit dat in beide landen de groei zo doorgaat.

- Teken de grafieken van A en B in één figuur. Laat zien dat beide grafieken twee punten gemeenschappelijk hebben.
- In welk jaar zijn er in land A meer leden van voetbalclubs dan in land B?

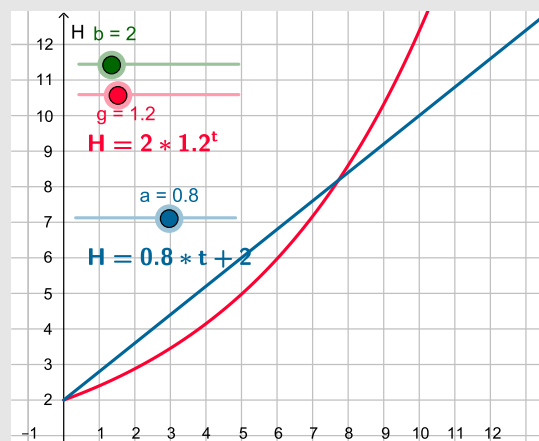
Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet: lineaire en exponentiële groei

Je ziet hier grafieken van twee belangrijke manieren van groei:

- **Lineaire groei** met beginhoeveelheid b en een vaste toename per eenheid van a .
Bijbehorende formule: $H = a \cdot t + b$.
Bijbehorende grafiek: een rechte lijn door $(0, b)$ met hellingsgetal a .
- **Exponentiële groei** met beginhoeveelheid b en een vaste groeifactor per eenheid van g .
Bijbehorende formule: $H = b \cdot g^t$.
Bijbehorende grafiek: een steeds sterker stijgende curve door $(0, b)$ als $g > 1$ en een steeds minder sterk dalende curve door $(0, b)$ als $0 < g < 1$.



Figuur 3.2

Bij lineaire groei met een vaste toename van $a = 0$ spreek je van een **constante functie**.

En dat is ook het geval bij exponentiële groei met groeifactor $g^0 = 1$.

Je kunt **groeifactoren omrekenen**:

als de groeifactor per dag 1,5 is, dan is hij per week $1,5^7$ en per uur $1,5^{\frac{1}{24}}$.



Voorbeeld 1

Na jaren van terugloop is de populatie zeehonden in het Nederlandse deel van het Waddengebied gelukkig weer gestegen. Sinds juni 2008 is het aantal zeehonden in dit gebied maandelijks met 2,6% toegenomen. Ga ervan uit dat er op 1 juli 2008 1534 zeehonden waren.

Neem aan dat de groei van het aantal zeehonden in dit gebied een tijdlang zo doorgaat en stel een bijpassende formule op.

Bereken het aantal zeehonden op 1 januari 2013.

Antwoord

Omdat er per maand een vast percentage zeehonden bij komt, is er sprake van exponentiële groei. De groeifactor per maand is 1,026. Neem $t = 0$ op 1 juli 2008, dan is de beginhoeveelheid 1534.

Is het aantal zeehonden Z en de tijd in maanden t dan is een juiste formule $Z = 1534 \cdot 1,026^t$.

Voor het aantal zeehonden op 1 januari 2013 geldt nu $t = 54$. Vul je dit in de formule in, dan vind je $Z \approx 6135$.

Opgave 3

In [Voorbeeld 1 op pagina 4](#) zie je hoe de populatie zeehonden in het Nederlandse deel van de Waddenzee groeit.

- a Bereken het aantal zeehonden op 1 januari 2009.
- b Hoeveel bedraagt de groeifactor per jaar? En het groeipercentage?
- c Stel een formule op voor het aantal zeehonden Z afhankelijk van de tijd t in jaren. Neem $t = 0$ op 1 januari 2009.
- d Bereken ook met de formule die je in c hebt gevonden het aantal zeehonden op 1 januari 2013. Verklaar het kleine verschil.

Opgave 4

In de [Theorie op pagina 3](#) zie je een applet waarin grafieken van lineaire groei en exponentiële groei met dezelfde beginhoeveelheid worden vergeleken.

- a Stel de functies $H_1 = 4 \cdot 1,10^t$ en $H_2 = 0,6t + 4$ in met behulp van de schuifbalkjes. Hoeveel snijpunten hebben de grafieken van deze functies?
- b Het éne snijpunt is uiteraard (0,4). Bepaal het tweede snijpunt in één decimaal nauwkeurig.
- c Als je de groeifactor van H_1 verandert, hebben de grafieken soms nog maar één snijpunt. Moet je de groeifactor daartoe groter of kleiner maken?
- d Stel de functies $H_1 = 4 \cdot 0,80^t$ en $H_2 = -0,5t + 4$ in met behulp van de schuifbalkjes. Hoeveel snijpunten hebben de grafieken van deze functies?
- e Het éne snijpunt is uiteraard (0,4). Bereken met behulp van inklemmen het tweede snijpunt in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 5

De afdeling bevolking van de gemeente Amsteldijk verwacht dat er eind van dit jaar zo'n 40.000 mensen in deze gemeente zullen wonen. Het gemeentebestuur hoopt dat het inwonersaantal nog verder zal uitbreiden omdat dit de mogelijkheid biedt om enkele voorzieningen te verbeteren.

Wethouder Simonsz zegt: "We streven er naar om elk jaar 1500 inwoners meer te hebben."

De burgemeester mw. Jansma hoopt echter elk jaar 3% meer inwoners te kunnen inschrijven dan het jaar ervoor.

- Maak nu grafieken voor de bevolkingsgrootte voor de komende acht jaar. Eén die past bij de uitspraak van dhr. Simonsz en één die past bij de uitspraak van mw. Jansma.
- Geef een passende formule voor het aantal inwoners N afhankelijk van de tijd t in jaren die past bij de uitspraak van wethouder Simonsz. Ga er van uit dat op $t = 0$ het aantal inwoners 40000 is.
- Geef een passende formule voor het aantal inwoners N afhankelijk van de tijd t in jaren die past bij de uitspraak van burgemeester Jansma. Ga er van uit dat op $t = 0$ het aantal inwoners 40000 is.
- Welk van beide formules levert op den duur de meeste inwoners op voor de gemeente Amsteldijk? Licht je antwoord toe.
- Volgens welke formule is het aantal inwoners van Amsteldijk voor het eerst verdubbeld?

Voorbeeld 2

In deze tabel wordt de groei van het aantal inwoners (afgerond op honderdtallen) van twee steden A en B weergegeven. Bij stad A is bij benadering sprake van lineaire groei en bij stad B heb je meer te maken met exponentiële groei. In welk jaar gaat het aantal inwoners van B dat van A overschrijden als de groei zo door gaat?

jaartal	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
aantal inwoners A	79600	81100	82600	84200	85600	87100	88500	90100	91600
aantal inwoners B	72100	73900	75800	77600	79600	81600	83600	85700	87800

Tabel 3.1

Antwoord

In stad A is de groei ongeveer lineair, er komen jaarlijks ongeveer 1500 mensen bij. Er geldt $A = 79600 + 1500t$ waarin A het aantal inwoners van A en t de tijd in jaren na 2000 is.

In stad B is de groei ongeveer exponentieel met groeifactor 1,025. Er geldt $B = 72100 \cdot 1,025^t$ waarin B het aantal inwoners van A en t de tijd in jaren na 2000 is.

Met behulp van deze formules kun je de tabellen voortzetten. Je merkt dan dat vanaf 2013 stad B meer inwoners heeft dan stad A.

Opgave 6

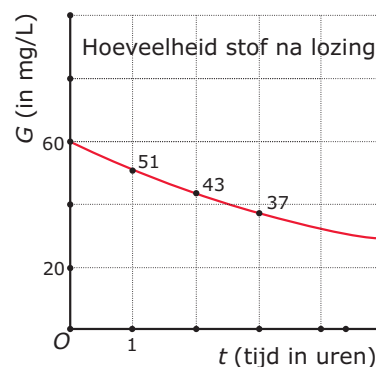
Bekijk [Voorbeeld 2 op pagina 5](#).

- Hoe ga je na dat er voor stad A (ongeveer) sprake is van lineaire groei? Ga dit ook echt na.
- Hoe leid je voor stad A de formule af uit de tabel?
- Hoe ga je na dat er voor stad B (ongeveer) sprake is van exponentiële groei? Ga dit ook echt na.
- Hoe leid je voor stad A de formule af uit de tabel?
- Laat zien in welk jaar het aantal inwoners van B dat van A gaat overschrijden als de groei zo door gaat.

Opgave 7

Hier zie je een grafiek die laat zien hoe een hoeveelheid gif G (in mg/L) in het water wordt afgebroken. De eerste drie metingen staan in de figuur. De hoeveelheid gif wordt steeds ongeveer met eenzelfde factor vermenigvuldigd die kleiner is dan 1, dus de hoeveelheid wordt steeds minder. Je spreekt dan van exponentieel verval.

- Laat met een berekening zien, dat er (ongeveer) sprake is van exponentieel verval.
- Leid een formule af voor G afhankelijk van t .
- Na hoeveel uur is er minder dan 10% van deze giftige stof over?



Figuur 3.3

Voorbeeld 3

Van een hoeveelheid N is het volgende gegeven:

Op $t = 3$ is $N = 1200$ en op $t = 11$ is $N = 800$.

Stel een formule op voor N als functie van t er sprake is exponentiële groei.

Antwoord

Bij exponentiële groei is er sprake van een groeifactor g per tijdseenheid. Per 8 tijdseenheden vermenigvuldig je met $800/1200 = \frac{2}{3}$. Je moet daarvoor acht keer met de groeifactor g vermenigvuldigen, dus $g \cdot g \cdot g \cdot g \cdot g \cdot g \cdot g \cdot g = g^8 = \frac{2}{3}$.

Je vindt $g = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{8}} \approx 0,95$.

Merk daarbij op dat het gebruikelijk is om de groeifactor (tenzij anders wordt vermeld) in twee decimalen, dus in procenten, nauwkeurig te bepalen.

De gevraagde formule is nu $N = b \cdot 0,95^t$.

Om de juiste waarde voor de beginhoeveelheid b te vinden gebruik je bijvoorbeeld $t = 3$ en $N = 1200$. Je vindt dan $b \approx 1400$.

De formule wordt $N \approx 1400 \cdot 0,95^t$.

Opgave 8

Bekijk hoe in [Voorbeeld 3 op pagina 6](#) een formule voor exponentiële groei van een hoeveelheid N wordt gevonden op basis van de waarden van N op twee verschillende tijdstippen.

- Bereken zelf de groeifactor per tijdseenheid.
- Voer ook zelf de berekening van de beginhoeveelheid uit.
- Je kunt de beginhoeveelheid ook berekenen door op $t = 11$ is $N = 800$ te gebruiken. Laat zien dat je ongeveer op hetzelfde uitkomt.

Opgave 9

Bij de gegevens in [Voorbeeld 3 op pagina 6](#) past ook een lineaire formule voor N als functie van t .

- Stel zo'n bijpassende formule op.

Je hebt nu twee rekenmodellen bij dezelfde gegevens: een lineaire functie en een exponentiële functie. Maar ze verschillen nogal.

- b** Bereken bij beide rekenmodellen de waarde van N als $t = 20$.
- c** Bij de lineaire functie is de hoeveelheid N op zeker moment op. Op welk moment is dat? En hoe zit het dan met het exponentiële rekenmodel?
- d** Is bij de exponentiële functie de hoeveelheid N ook op zeker moment op? Licht je antwoord toe.

Oefenen

Opgave 10

Een hoeveelheid H heeft op $t = 0$ de waarde 160. Stel in de volgende gevallen een formule op voor H afhankelijk van t (in dagen) en bereken de waarde van H op $t = 10$ in gehelen nauwkeurig.

- a** H neemt dagelijks toe met 15%.
- b** H neemt dagelijks toe met 15.
- c** H neemt dagelijks af met 15%.
- d** H neemt dagelijks af met 15.
- e** H neemt wekelijks toe met 15%.
- f** H neemt wekelijks af met 15%.

Opgave 11

Van een middelgrote stad geeft deze tabel de aantallen inwoners afgerond op honderdtallen. Op de afdeling huisvesting wil men de groei voor de komende jaren voorspellen.

jaartal	bevolking
2008	154000
2009	156300
2010	158700
2011	161000

Tabel 3.2

Eén van de medewerkers zegt: “Je zou kunnen veronderstellen dat er jaarlijks zo’n 2300 inwoners bijkomen.”

- a** Van welke soort groei gaat deze medewerker uit? Laat zien dat dit wel ongeveer zou kunnen kloppen binnen de afgesproken afronding.
- b** Neem aan dat t de tijd in jaren na 2008 is. Welke formule voor het aantal inwoners I volgt uit de aanname van lineaire groei?

Een andere medewerker merkt op: “Er zou ook sprake kunnen zijn van exponentiële groei met 1,5% per jaar.”

- c** Laat zien hoe zij aan dit groeipercentage is gekomen.
- d** Welke formule kun je opstellen voor I als functie van t uitgaande van deze exponentiële groei?
- e** Er zijn nu twee formules gevonden waarmee je de bevolking van deze stad in volgende jaren zou kunnen voorspellen. Wat is het grote verschil tussen beide?
- f** Voorspel met beide formules het aantal inwoners van deze stad in 2020.

Opgave 12

In een uiterwaard langs de IJssel heeft Rijkswaterstaat in 2005 vossen uitgezet om het aantal konijnen dat er leeft te doen verminderen. De konijnen vormden namelijk een plaag in dit gebied. Biologen hebben sinds 2005 jaarlijks het aantal konijnen geteld. Dit is weergegeven in de volgende tabel:

jaartal	2005	2006	2007	2008	2009
aantal konijnen	1450	1261	1097	954	830

Tabel 3.3

- Met hoeveel procent per jaar neemt het aantal konijnen sinds 2005 af? Is dat percentage elk jaar ongeveer evenveel?
- Welke formule kun je opstellen voor het aantal konijnen K afhankelijk van de tijd t in jaren?
Het aantal konijnen mag echter niet onder de 175 komen, want dan loopt hun voortbestaan gevaar en hebben ook de vossen niet meer voldoende voedsel.
- Vanaf welk jaar moet Rijkswaterstaat beginnen met het vangen van vossen om te voorkomen dat dit gebeurt?

Opgave 13

Als je gaat duiken in de diepzee dan zul je merken dat hoe dieper je komt, hoe blauwer alles eruit ziet. Dit komt doordat het rode licht minder ver in water doordringt dan blauw licht. Dit blauwe licht kan dan dieper doordringen. Per meter diepte wordt 32,7% van het blauwe licht tegengehouden door het water.

Tot welke diepte dringt dan nog maar 1% van het blauwe licht door?



Figuur 3.4

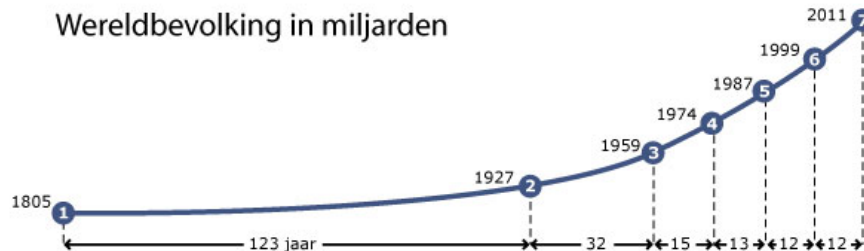
Opgave 14

Elke ochtend om 9:00 uur krijgt een patiënt door middel van een injectie 2 mL van een pijnstillend medicijn toegediend. Door afbraak in het lichaam van de patiënt neemt de hoeveelheid geneesmiddel elke 12 uur af met 32%.

- Met welke groefactor neemt de hoeveelheid pijnstiller elke 12 uur af?
- Met welke groefactor neemt de hoeveelheid pijnstiller elke 6 uur af? Welk afnamepercentage per zes uur hoort daar bij?
- Met welke groefactor neemt de hoeveelheid pijnstiller elk uur af? Welk afnamepercentage per uur hoort daar bij?
- Hoeveel mL van het pijnstillend middel bevindt zich na één dag vlak voor de volgende injectie in het lichaam van de man? En hoeveel mL direct na de injectie?
- Bereken de hoeveelheid pijnstiller na 30 uur. En ook na 60 uur.
- Schets een grafiek van de hoeveelheid geneesmiddel gedurende de eerste 60 uur.

Opgave 15

Een dergelijke grafiek stond eind 2011 in De Volkskrant. Men dacht op dat moment dat het aantal mensen op Aarde de 7 miljard was overschreden. De grafiek doet sterk denken aan exponentiële groei. Toch is dat niet helemaal juist.



Figuur 3.5

- Laat zien dat de wereldbevolking tussen 1805 en 1927 met ongeveer 0,56% per jaar toenam. Tussen 1927 en 1959 groeide de wereldbevolking sneller.
- Met hoeveel procent per jaar ongeveer?
- Laat zien dat de wereldbevolking tussen 1959 en 1974 het snelst groeide en dat de groei daarna weer wat afnam.
- Als de groei de komende jaren op dezelfde wijze zal doorgaan, wat betekent dit dan voor de wereldbevolking op den duur?

Toepassen

Als er iets is dat steeds sneller lijkt te groeien dan is dat wel het computergebruik en het internetverkeer. Het plaatje hiernaast laat daar iets van zien uit de beginjaren van het computertijdperk waarin we nu leven. De tabel symboliseert de 'wet van Moore'. Daarbij moet je weten dat de zogenaamde 'processor' (een minuscule printplaatje, een chip) de hele rekenkracht van de computer vertegenwoordigde. Daarbij speelde het aantal transistoren dat men op zo'n processor kwijt kon een grote rol: hoe meer processoren, hoe groter de rekenkracht. In 1970 voorspelde Gordon Moore (één van de oprichters van chipsfabrikant Intel) dat het aantal transistoren dat men op zo'n processor kwijt kon elke 2 jaar zou verdubbelen. En hij kreeg gelijk...

Intel-processor	introductiejaar	# transistoren
4004	1971	2300
8008	1972	2500
8080	1974	4500
8086	1978	29.000
286	1982	134.000
386	1985	275.000
486	1989	1.200.000
Pentium	1993	3.100.000
Pentium II	1997	7.500.000
Pentium III	1999	9.500.000
Pentium 4	2000	42.000.000
Itanium	2001	25.000.000
Itanium 2	2003	220.000.000
Itanium 2 9M	2004	592.000.000

Tabel 3.4

Na 2000 werden er meerdere processoren gebruikt die samen de rekencapaciteit nog verder konden verhogen. Pas in de huidige tijd wordt er gewerkt aan andere technologieën voor computers en zal de wet van Moore wellicht ooit in het museum terecht komen.

Maar niet alleen de rekenkracht van de computer groeide exponentieel, ook het aantal gebruikers van internet, van Google, van Facebook, ..., groeide enorm. En het is niet duidelijk of de grenzen van die groei in zicht komen...

Opgave 16: De wet van Moore

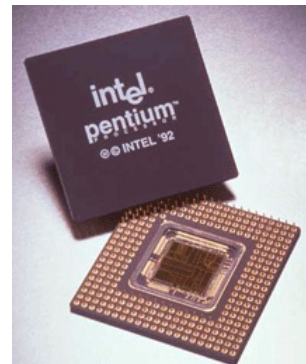
Bekijk de figuur.

In 1972 introduceerde Intel de 8008 processor met 2500 transistoren. Ga uit van de wet van Moore dat elke 2 jaar het aantal transistoren op een processor verdubbelt.

- a In 1993 introduceerde Intel de Pentium-processor. Lag men met die processor nog op Moore's schema?
- b In 2000 kwam de Pentium 4. Paste die in de wet van Moore?

Zeker tot 2012 is de rekenkracht van een computer ongeveer elke twee jaar verdubbeld. Stel je voor dat R die rekenkracht voorstelt afhankelijk van t het aantal jaren na 1972. Op $t = 0$ is $R = 2500$.

- c Stel een formule op voor R als functie van t .
- d Bereken hiermee de rekenkracht die een computer uit 2012 volgens de wet van Moore zou hebben.
- e Onderzoek in welk jaar die rekenkracht boven de 1 biljoen, dus boven $1 \cdot 10^{12}$ uit gaat komen volgens de wet van Moore.



Figuur 3.6

Opgave 17: Facebook

Uit [Wikipedia, december 2012](#):

“In april 2009 had Facebook meer dan 200 miljoen actieve gebruikers, vijf maanden later waren dat er 50 miljoen meer. In juli 2010 bediende Facebook een half miljard gebruikers, circa zeven procent van het aantal aardbewoners. December 2012 heeft Facebook ongeveer 955 miljoen gebruikers.”

- a Gebruik de gegevens over het aantal Facebookgebruikers van april 2009, juli 2010 en december 2012 om te onderzoeken of het aantal Facebookgebruikers exponentieel is gegroeid in die jaren.
- b Ook zonder berekening is wel duidelijk dat de groei van de eerste maanden niet in dit tempo door kon blijven gaan. Waarom?

Testen

Opgave 18

Autobanden zijn meestal een beetje poreus (luchtdoorlatend). Dit betekent dat een opgepompte band steeds een beetje zachter wordt. De **bandenspanning** van een band is na het oppompen ongeveer gelijk aan 2,103 bar. Deze bandenspanning neemt elke dag met ongeveer 13,3% af.

- a Welke groeifactor per dag heeft de bandenspanning?
- b Welke groeifactor per week heeft de bandenspanning? En welke groeifactor per uur?
- c Stel een formule op voor de bandenspanning p van deze autoband afhankelijk van de tijd t in dagen.
- d Je kunt niet meer rijden als de bandenspanning minder is dan 0,1 bar. Hoeveel dagen duurt dit nadat je de band hebt opgepompt?



Figuur 3.7

Opgave 19

Het aantal WhatsApp-berichten W is sinds 2001 flink toegenomen. Zie onderstaande tabel (aantallen berichten W in miljoenen):

jaartal	2005	2006	2007	2008
W	4,9	9,8	19,6	39,2

Tabel 3.5



Figuur 3.8

- a** Met hoeveel procent neemt het aantal WhatsApp-berichten per jaar toe?
- b** Welke formule kun je opstellen voor het aantal WhatsApp-berichten W per jaar (in miljoenen) afhankelijk van het aantal jaren t na 2005?
- c** Hoeveel van deze berichten verwachtte men in 2012?

3.2 Exponentiële functies

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- werken met exponentiële functies en herkennen of er van exponentiële groei sprake is;
- verdubbelingstijd en halveringstijd berekenen.

Voorkennis

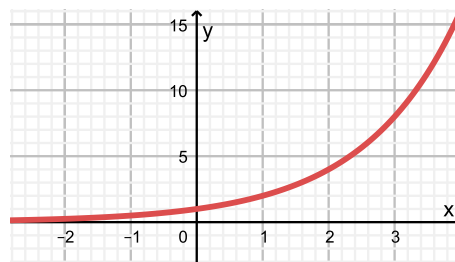
- werken met exponentiële groei en de bijbehorende groeifactor;
- lineaire groei en exponentiële groei vergelijken;
- formules opstellen voor lineaire en exponentiële groei.

Verkennen

Opgave V1

Hier zie je de grafiek van $y = 2^x$, ook voor negatieve waarden van x .

- Wat gebeurt er met de uitkomst als x met 1 toeneemt?
- Wat gebeurt er met de uitkomst als x met 1 afneemt?
- Hoeveel is 2^0 ? Kun je dat verklaren?
- Hoeveel is 2^{-1} ?
- Krijg je ooit een uitkomst 0?



Figuur 3.1

Opgave V2

Tot nu toe heb je bij exponentiële functies weinig met mintekens te maken gehad. Toch kun je heel goed een grafiek maken van $y = -2^x$, ook voor negatieve waarden van x .

- Hoe ziet die grafiek er uit?

Maar bekijk nu $y = (-2)^x$

- Vul de volgende tabel in:

x	0	1	2	3	4
y					

Tabel 3.1

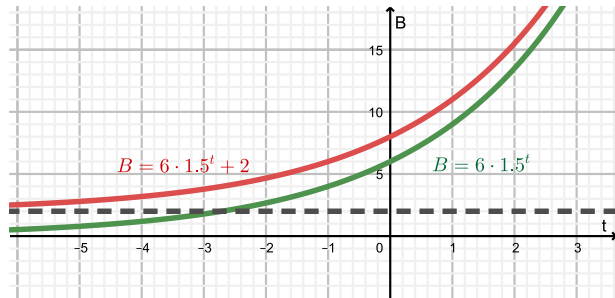
- Kun je nu bij deze functie een zinvolle grafiek tekenen? Licht je antwoord toe.

Uitleg

Bekijk de applet: exponentiële functie

Hier zie je de grafiek van de exponentiële functie $y = 6 \cdot 1,5^t$.

Er is sprake van exponentiële groei met beginwaarde 6 en groeifactor 1,5. Elke toename van x met 1 betekent dat de hoeveelheid 1,5 keer zo groot wordt. Elke afname van t met 1 betekent dat de hoeveelheid door 1,5 wordt gedeeld. De uitkomsten naderen naar 0, maar blijven toch altijd positief. De lijn $y = 0$ is de horizontale asymptoot van de grafiek.



Figuur 3.2

Ook de functie $y = 6 \cdot 1,5^t + 2$ is een exponentiële functie.

Maar nu is er van exponentiële groei geen sprake.

De grafiek van $y = 6 \cdot 1,5^t$ is 2 omhoog geschoven.

De lijn $y = 2$ is nu de horizontale asymptoot.

Bij $y = 6 \cdot 1,5^t$ is er sprake van een vaste verdubbelingstijd: hoe groot de hoeveelheid op zeker moment ook is, er telkens evenveel tijd nodig om het dubbele te krijgen, namelijk ongeveer 1,71 tijdseenheden.

Bij $y = 6 \cdot 1,5^x + 2$ is dat niet het geval.

Opgave 1

Bekijk de grafiek van de exponentiële functie $y = 6 \cdot 1,5^t$ in de [Uitleg op pagina 13](#).

- Hoe kun je aan de groeifactor zien dat de grafiek stijgend is?
- Wat gebeurt er met de y -waarde als t met 1 toeneemt?
En als t met 1 afneemt?
- Wat gebeurt er met de y -waarde als t oneindig groot wordt?
En als t oneindig klein (hele grote negatieve getallen) wordt?
- Op welk tijdstip t zit y voor het eerst minder dan 10^{-6} van 0 af? Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.
- Bereken de verdubbelingstijd die hoort bij deze exponentiële groei.
- Laat zien dat deze verdubbelingstijd niet afhangt van de y -waarde waar je mee begint.

Opgave 2

Bekijk de grafiek van de exponentiële functie $y = 6 \cdot 1,5^t + 2$ in de [Uitleg op pagina 13](#).

- Hoe kun je aan de groeifactor zien dat de grafiek stijgend is?
- Waarom is er nu geen sprake van exponentiële groei?
- Wat gebeurt er met de y -waarde als t oneindig groot wordt?
En als t oneindig klein (hele grote negatieve getallen) wordt?
- Op welk tijdstip t zit y voor het eerst minder dan 10^{-6} van de horizontale asymptoot af? Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.
- Waarom valt er nu geen verdubbelingstijd te berekenen?

Opgave 3

Neem eens aan, dat je een glas met water van 70°C in een kamer met een temperatuur van 20°C zet. Volgens de warmtewet van Newton neemt het temperatuurverschil met de omgeving met een vast percentage per uur af. Neem aan dat dit met 60% per uur is.

- a Hoeveel graden is de watertemperatuur na 1 uur?

Neem aan dat T de temperatuur in $^{\circ}\text{C}$ en t de tijd in uren is.

- b Waarom is de formule $T = 70 \cdot 0,4^t$ geen goede formule voor dit afkoelingsproces?
- c Bedenk een formule die wel past bij dit afkoelingsproces.
- d Is hier sprake van exponentiële afname, exponentieel verval?

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet: exponentiële functie

Elke functie van de vorm $y = b \cdot g^x + a$ heet een **exponentiële functie**. Er zijn twee soorten exponentiële functies:

- exponentiële functies met een stijgende grafiek als $g > 1$;
- exponentiële functies met een dalende grafiek als $g < 1$.

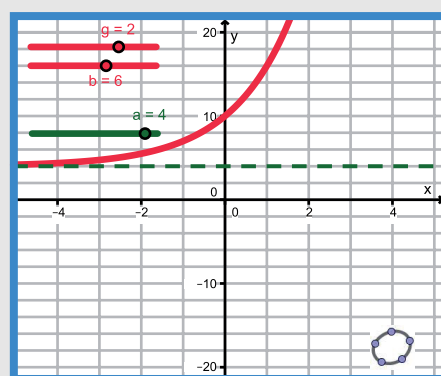
Bij al deze functies is er sprake van een **asymptoot**. In dit geval is de asymptoot de lijn $y = a$, een lijn waar de grafiek wel steeds dichterbij komt te lopen, maar waar hij nooit mee samenvalt.

Alleen als $a = 0$ is er sprake van exponentiële groei.

De **verdubbelingstijd** is dan de tijdsduur waarin de (begin)hoeveelheid verdubbelt.

De **asymptoot** is dan de tijdsduur waarin de (begin)hoeveelheid halveert.

Deze tijdsduren kun je vooralsnog alleen met inklemmen of een grafische rekenmachine of GeoGebra vinden.



Figuur 3.3

Voorbeeld 1

De brandstof van kerncentrales bestaat uit staven uranium. Dit uranium wordt in de reactor omgezet naar plutonium. Deze stof zendt radioactieve straling uit met een halveringstijd van 10.000 jaar. Omdat de tijd waarin de hoeveelheid plutonium halveert zo groot is, is het bewaren van dit radioactieve afval een probleem.

Hoe lang moet je 10 kg plutonium als radioactief afval opslaan om te zorgen dat er nog 1 kg van over is?

Antwoord

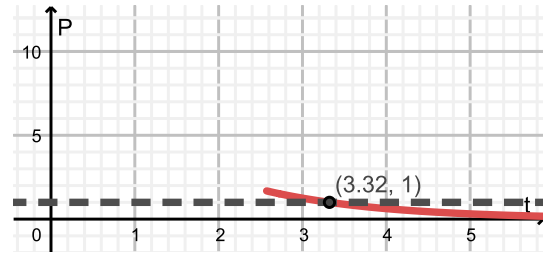
Neem je de tijd t in eenheden van één halveringstijd, dan is de hoeveelheid plutonium P in kg:

$$P = 10 \cdot 0,5^t$$

Je hebt dan nog 1 kg over als $10 \cdot 0,5^t = 1$.

Dat levert met GeoGebra op: $t \approx 3,32$.

Je moet het plutonium dan ongeveer $3,32 \cdot 10000 = 33200$ jaar bewaren.



Figuur 3.4

Je kunt ook de tijd t in jaren nemen.

Dan moet je eerst de groeifactor g per jaar berekenen vanuit de halveringstijd, dus vanuit:

$$10 \cdot g^{10000} = 5 \text{ ofwel } g^{10000} = 0,5.$$

Je vindt $g = 0,5^{\frac{1}{10000}} = 0,9999306... \approx 0,99993$. (Neem vooral veel decimalen.)

Vervolgens moet je oplossen $10 \cdot 0,99993^t = 1$.

Je vindt dan $t \approx 33219$ jaar.

Opgave 4

In **Voorbeeld 1 op pagina 14** wordt het verloop van de hoeveelheid plutonium in de loop van de tijd beschreven door een beginwaarde en een halveringstijd.

- Waarom is er dan sprake van exponentieel verval?
- Welke eenheid van tijd hoort er bij de formule $P = 10 \cdot 0,5^t$?
- Welke horizontale asymptoot heeft deze formule?
- Bereken zelf de groeifactor per jaar.
Ga met behulp van GeoGebra of de grafische rekenmachine na dat na 33219 jaar de hoeveelheid plutonium minder dan 1 kg is.

Opgave 5

Bij het huidige groeitempo is de verdubbelingstijd van de wereldbevolking 58 jaar.

Eind 2011 bedroeg de wereldbevolking 7 miljard mensen.

- Stel een formule op voor het aantal mensen N als functie van de tijd t .
Neem als tijdseenheid de verdubbelingstijd.
- Na hoeveel jaar zouden er 10 miljard mensen op aarde zijn?
- Stel ook een formule op voor N als functie van t in jaren.
- Laat zien dat deze formule hetzelfde resultaat oplevert als bij b.

Voorbeeld 2

Je ziet hier het verloop van de temperatuur T in $^{\circ}\text{C}$ van theewater in een beker die wordt geplaatst in een omgevingstemperatuur van 20°C afhankelijk van de temperatuur t in uren.

t in uur	0	1	2	3	4	5	6	7	8
T in $^{\circ}\text{C}$	90,0	48,0	31,2	24,5	21,8	20,7	20,3	20,1	20,0

Tabel 3.2

Laat zien, dat de formule $T = 70 \cdot 0,4^t + 20$ redelijk past bij deze tabel.

Als het theewater onder de 30°C komt kun je er geen bruikbare thee meer van maken. Na hoeveel uur is dat niet meer mogelijk?

Antwoord

Maak een tabel met de gegeven formule en vergelijk hem met de tabel hierboven.

Je zult zien dat ze goed overeenkomen.

Bruikbare thee kun je maken tot $70 \cdot 0,4^t + 20 < 30$.

Zo'n vergelijking kun je nog niet algebraïsch oplossen en dus kun je net zo goed meteen GeoGebra of een grafische rekenmachine inzetten. Je krijgt dan gemakkelijk de juiste oplossing $t > 2,12$ uur.

Opgave 6

Bekijk het [Voorbeeld 2 op pagina 15](#).

- Maak zelf een tabel en een grafiek bij de formule.
- Welke horizontale asymptoot heeft de grafiek van T ?
- Waarom is hier geen sprake van exponentiële afname?
- Laat zien dat je geen bruikbare thee meer kunt maken na $t > 2,12$.

Opgave 7

Een patiënt krijgt via een infuus een medicijn toegediend. De formule

$$A = 540 - 540 \cdot 0,95^t$$

geeft de hoeveelheid A in mg van het medicijn die na t minuten in het bloed van de patiënt is opgenomen.

- Is de grafiek van A als functie van t dalend of stijgend?
Hoe zie je dat aan de formule?
- Geef een formule voor de asymptoot van de grafiek van A .
- Laat zien dat er geen sprake is van exponentiële groei.
- Na hoeveel minuten is 75 % van de maximale hoeveelheid medicijn in het bloed opgenomen?

Oefenen

Opgave 8

Bekijk de grafiek van de exponentiële functie $y = 50 \cdot 0,92^t$.

- Hoe kun je aan de groeifactor zien dat de grafiek dalend is?
- Wat gebeurt er met de y -waarde als t met 1 toeneemt?
En als t met 1 afneemt?
- Wat gebeurt er met de y -waarde als t oneindig groot wordt?
En als t oneindig klein (hele grote negatieve getallen) wordt?
- Op welk tijdstip t zit y voor het eerst minder dan 10^{-2} van 0 af? Geef je antwoord in gehelen nauwkeurig.
- Bereken de halveringstijd die hoort bij deze exponentiële groei. Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

Opgave 9

Bekijk de grafiek van de exponentiële functie $y = 20 - 14 \cdot 0,8^t$.

- Hoe kun je aan de formule zien dat de grafiek stijgend is?
- Waarom is er nu geen sprake van exponentiële groei?
- Wat gebeurt er met de y -waarde als t oneindig groot wordt?
En als t oneindig klein (hele grote negatieve getallen) wordt?
- Op welk tijdstip t zit y voor het eerst minder dan 10^{-2} van de horizontale asymptoot af? Geef je antwoord in gehelen nauwkeurig.
- Waarom valt er nu geen verdubbelingstijd te berekenen?

Opgave 10

Salmonella is een darmbacterie. Die komt door uitwerpselen van mens en dier terecht in het milieu, in het water en in levensmiddelen. Mensen lopen meestal een besmetting op door rauwe dierlijke producten, zoals vlees, vis, eieren en zuivel. Ook groenten en fruit kunnen salmonella bevatten.

Bij een temperatuur van 20°C wordt het aantal bacteriën elk half uur verdrievoudigd.

- Als het aantal salmonellabacteriën elk half uur drie keer zo groot wordt, met welke groeifactor per uur neemt dit aantal dan toe?
- Hoe groot is de groeifactor (drie decimalen) per minuut?

Neem aan dat A het aantal salmonella bacteriën en t de tijd in minuten is. De omgevingstemperatuur is 20°C .

Op $t = 0$ zitten er in een salade 20 salmonella bacteriën per ml.

- Welke formule geldt voor A afhankelijk van t ?
- Bereken de verdubbelingstijd bij deze groei in tienden van minuten nauwkeurig.

Als er meer dan $1,0 \cdot 10^5$ bacteriën per ml in het voedsel voorkomen, kun je ziek worden als je ervan eet.

- Na hoeveel tijd kun je je salade niet meer eten?

Opgave 11

Alcohol is een stof die door het lichaam slechts langzaam wordt afgebroken. De snelheid hiervan hangt onder andere af van het lichaamsgewicht. Voor de twintigjarige Jelte geldt dat het promillage alcohol in het bloed per half uur met 9% afneemt. Op een feestje heeft hij wat alcohol genuttigd en hij moest om 01:00 uur in de nacht blazen. Hij had toen een promillage in zijn bloed van 0,6. Als het promillage lager is dan 0,5 mag hij weer rijden.

Hoe lang moet Jelte wachten?



Figuur 3.5

Opgave 12

De lucht in een autoband wordt vaak opgepompt tot een druk van 3,2 bar. De luchtdruk van de buitenlucht is ongeveer 1,0 bar. De band verliest langzaam zijn druk tot die druk gelijk is aan die van de buitenlucht. En dus is die druk p (in bar) afhankelijk van de tijd t (in dagen) na het oppompen.



Neem aan dat voor een bepaalde band geldt $p = 2,2 \cdot 0,96^t + 1$.

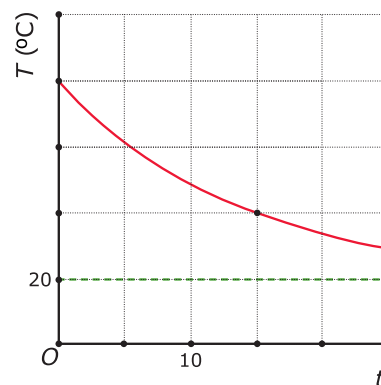
- a Welke asymptoot heeft de grafiek van p als functie van t ? En welke betekenis heeft die asymptoot voor de druk in de band?
- b Waarom hebben negatieve waarden van t hier geen betekenis?
- c Een autoband is te zacht als de druk lager is dan 1,6 bar. Hoeveel dagen na het oppompen is dat het geval?

Toepassen

Deze grafiek geeft het afkoelen weer van een kop thee. Daarvoor geldt volgens de warmtewet van Newton dat het temperatuurverschil met de omgeving elke tijdseenheid met een vast percentage afneemt.

De temperatuurmeting begint op $t = 0$ als de thee een temperatuur van 80°C heeft, een temperatuurverschil van 60°C met de omgeving. Dat de omgevingstemperatuur 20°C is, wordt door de asymptoot van de grafiek aangegeven.

Je ziet in de grafiek dat het temperatuurverschil met de omgeving $T - 20$ na 15 minuten $\frac{1}{3}$ deel van het temperatuurverschil op $t = 0$ is. Hiermee kun je de groeifactor van het temperatuurverschil uitrekenen en een formule opstellen voor $T - 20$ en dus ook voor T als functie van t in minuten.



Figuur 3.6

Opgave 13: Afkoelende thee

Voor het temperatuursverschil met de omgeving geldt volgens de tekst $T - 20 = b \cdot g^t$.

- a Licht dit toe.
- b Bereken g in twee decimalen nauwkeurig.
- c Stel een formule op voor T als functie van t .
- d Na hoeveel minuten is de temperatuur van de thee lager van 25°C ?

Opgave 14: Opwarmende melk

Melk komt met een temperatuur van 6°C uit de koelkast en warmt langzaam op naar kamertemperatuur (20°C). Ook in dit geval geldt de warmtewet van Newton, dus bij de opwarming neemt het temperatuurverschil met omgeving exponentieel af.

Iemand meet dat de melk 10 minuten nadat ze uit de koelkast is gehaald een temperatuur van 13°C heeft.

Maak een schets van een mogelijke grafiek van de opwarming van de melk. Stel ook een bijpassende formule op.

Testen

Opgave 15

In 1999 waren er 6 miljard mensen en in 2011 waren dat er 7 miljard.
Neem aan dat de wereldbevolking exponentieel groeide in die periode.

- a Welke groeifactor per jaar hoort er bij die exponentiële groei?
Met hoeveel procent nam de wereldbevolking jaarlijks toe? Geef je antwoord in tienden van procenten.



- b** Ga er vanuit dat de groei van de wereldbevolking vanaf 2011 met dezelfde groeifactor door gaat. Welke formule kun je dan opstellen voor het aantal mensen N afhankelijk van de tijd t in jaren?
- c** Hoeveel bedraagt de verdubbelingstijd van N ?
- d** In welk jaar zou volgens dit groeimodel de wereldbevolking de 10 miljard gaan overschrijden?

Opgave 16

In een glas bevindt zich een liter water dat zojuist nog heeft gekookt. De temperatuur bij inschenken in het glas $t = 0$ bedroeg $95\text{ }^{\circ}\text{C}$. Het glas staat in een kamer waarbinnen de temperatuur $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ is. De temperatuur T in $^{\circ}\text{C}$ van het water daalt volgens de formule

$$T = 75 \cdot 0,9^t + 20$$

waarin t de tijd in minuten na het inschenken is.

- a** Laat zien, dat de temperatuur bij inschenken inderdaad $95\text{ }^{\circ}\text{C}$ bedroeg.
- b** Waarom is hier geen sprake van exponentiële afname?
- c** Welke formule hoort er bij de horizontale asymptoot?
- d** Na hoeveel tijd is de temperatuur lager dan $30\text{ }^{\circ}\text{C}$? Geef je antwoord in tienden van minuten nauwkeurig.

3.3 Het begrip logaritme

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- het begrip logaritme en enkele eigenschappen ervan kennen;
- logaritmen berekenen;
- exponentiële vergelijkingen oplossen met behulp van logaritmen.

Voorkennis

- werken met exponentiële functies, ook met GeoGebra of een grafische rekenmachine;
- werken met de begrippen macht, grondtal en exponent.

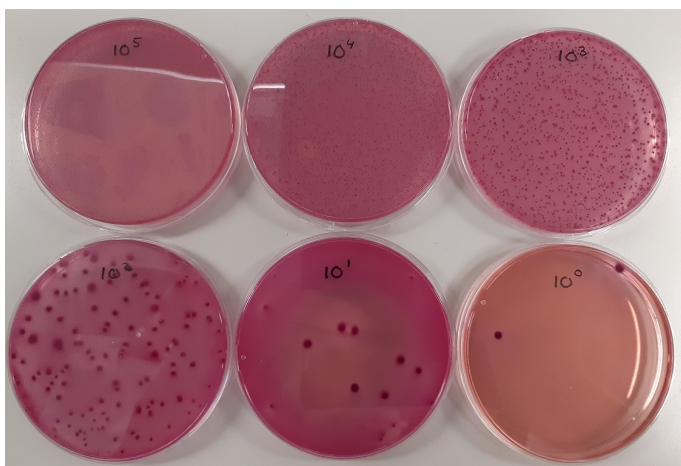
Verkennen

Opgave V1

Bacteriën groeien exponentieel door zichzelf steeds te delen. Daardoor kan uit één bacteriecel een zichtbaar hoopje bacteriën ontstaan. Dit heet een bacteriekolonie en de bacteriecel waaruit hij ontstaat heet een kolonievormende eenheid (KVE).

In zes petrischaaltjes zijn voedingsbodems gemaakt waarop bacteriecellen kunnen groeien. Op deze voedingsbodems is 1 mL verdund monster met bacteriecellen aangebracht, de verdunningsfactor is op iedere voedingsbodem verschillend. Hoe meer verdund, hoe minder bacteriekolonies er ontstaan. Zie onderstaande afbeelding.

De afspraak is dat een voedingsbodem waarop tussen de 15 en 150 bacteriekolonies ontstaan, wordt geteld.



Figuur 3.1

- a Op de voedingsbodem waarbij het monster 10^2 keer is verdund, zijn er na 18 uur (bij 37°C) 80 bacteriekolonies ontstaan.
Hoeveel kolonievormende eenheden zitten er dan in 1 mL onverdund monster?

Tijdens de exponentiële groeifase (de zogenaamde 'logfase') blijkt dat de bacterie zich iedere 20 minuten verdubbelt. Hierbij past de groeiformule:

$$B = 1 \cdot 2^{\frac{t}{20}}$$

waarin B het aantal bacteriën en t de tijd in minuten is.

- b** Bereken het aantal bacteriën na 40, 60 en 120 minuten.
- c** Hoe wordt de formule bij b als je de tijd in uren neemt?
Controleer je formule door het aantal bacteriën te berekenen na 1 en na 2 uur. Krijg je hetzelfde antwoord als bij b?
- d** Na hoeveel uur (in minuten nauwkeurig) zijn er 6000 bacteriën gevormd?

Uitleg 1

Bekijk de applet: logaritme

Een hoeveelheid bacteriën groeit exponentieel. Voor de hoeveelheid bacteriën B in een petrischaaltje geldt $B = 2 \cdot 10^t$ met t in uur. Na hoeveel uur (in minuten nauwkeurig) zijn er 1200 bacteriën?

$$2 \cdot 10^t = 1200 \text{ geeft: } 10^t = 600$$

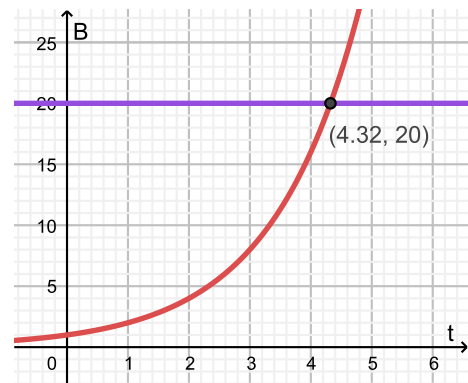
Met een grafiek vind je de oplossing $t \approx 2,78$.

Dit antwoord is afgerond.

De exacte oplossing schrijf je als: $t = \log(600)$.

Dit is de logaritme van 600 met grondtal 10.

Het grondtal 10 schrijf je niet op, ook op een rekenmachine zie je dit grondtal niet.



Figuur 3.2

Opgave 1

Bekijk de bacteriegroei in [Uitleg 1 op pagina 21](#).

- a** Je wilt weten na hoeveel tijd de hoeveelheid bacteriën 5000 is.
Schrijf het antwoord als logaritme en bepaal het in twee decimalen nauwkeurig.
- b** Los nu met behulp van een logaritme op: $10^t = 1000$.
Waarom komt de waarde van t op een geheel getal uit?
- c** Controleer dat ook met de applet deze waarde voor t wordt gevonden.

Opgave 2

Je hebt gezien hoe je een vergelijking zoals $10^t = c$ kunt oplossen met behulp van een logaritme met grondtal 10.

- a** In welke gevallen wordt de oplossing een geheel getal?
- b** Laat door berekening zien, dat $\log(10^3) = 3 \cdot \log(10)$.
- c** Waarom geldt in het algemeen $\log(10^t) = t \cdot \log(10)$?
- d** Ga met je rekenmachine na, dat ook $\log(2^3) = 3 \cdot \log(2)$.
Controleer dit ook voor andere getallen.
- e** Welke eigenschap van logaritmen geldt dus?

Uitleg 2

Voor een andere bacteriekolonie geldt: $B = 4 \cdot 1,5^t$.

Hierin is B het aantal bacteriën en t de tijd in uren.

Als je nu wilt weten na hoeveel tijd je 1000 bacteriën hebt, dan moet je oplossen:

$$4 \cdot 1,5^t = 1000$$

Eerst beide zijden delen door 4 geeft:

$$1,5^t = 250$$

Ook een dergelijke vergelijking kun je met behulp van logaritmen oplossen.

Je gebruikt dan de eigenschap $\log(g^t) = t \cdot \log(g)$.

$1,5^t = 250$ los je op door aan beide zijden de logaritme te nemen: $\log(1,5^t) = \log(250)$.

De eerder genoemde eigenschap geeft dan $t \cdot \log(1,5) = \log(250)$.

$$\text{En dus is } t = \frac{\log(250)}{\log(1,5)}.$$

En dit kun je gewoon met je rekenmachine berekenen: $t = \frac{\log(250)}{\log(1,5)} \approx 13,62$.

De oplossing van $1,5^t = 250$ wordt wel kortweg genoteerd als $t = {}^{1,5}\log(250)$.

Dit is een logaritme met grondtal 1,5.

Met de oplossing die je eerder zag betekent dit ${}^{1,5}\log(250) = \frac{\log(250)}{\log(1,5)}$.

Opgave 3

Bekijk [Uitleg 2 op pagina 22](#).

- Los zelf de vergelijking $4 \cdot 1,5^t = 2000$ op met behulp van de 10-logaritme.
- Schrijf de oplossing van de vergelijking $1,5^t = 500$ op als één logaritme.
- Hoe bereken je ${}^{1,5}\log(500)$ op je rekenmachine?

Opgave 4

Een bacteriekolonie groeit volgens de formule $B = 6 \cdot 5^t$ met t de tijd in uren en B het aantal bacteriën.

- Bereken met behulp van logaritmen na hoeveel tijd er 6000 bacteriën zijn.
Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.
- Bereken met behulp van logaritmen de verdubbelingstijd in twee decimalen nauwkeurig.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

De **10-logaritme** $x = \log(c)$ is de oplossing van $10^x = c$.

Dus geldt dan ook:

$$\log(10^c) = c \text{ en } 10^{\log(c)} = c$$

De 10-logaritme is de terugrekenbewerking van de exponentiële functie met grondtal 10 en omgekeerd.

De **g-logaritme** $x = {}^g\log(c)$ is de oplossing van $g^x = c$.

Ook hier geldt:

$$^g \log (g^c) = c \text{ en } g^{^g \log (c)} = c$$

De logaritme $^g \log (c)$ heeft alleen betekenis als $0 < g < 1$ of $g > 1$ en $c > 0$.

Het verband tussen $^g \log (c)$ en $\log (c)$ is:

$$^g \log (c) = \frac{\log (c)}{\log (g)}.$$

Hiermee kun je logaritmen met een willekeurig grondtal op een rekenmachine berekenen.

Soms gaat dit ook rechtstreeks, het grondtal staat dan rechts onder de log: $\log_g (c)$.

Voorbeeld 1

Luchtschepen zijn gevuld met gas met een lage soortelijke massa. Dat gas staat onder druk en er lekt een klein deel van weg.

Een luchtschip met een inhoud van 3000 m^3 verliest elke tien dagen ongeveer 2% van het gas. Als er minder dan 2400 m^3 over is, kan het luchtschip niet meer vliegen. Hoeveel dagen kan het luchtschip vliegen als het geheel is gevuld met gas? Geef je antwoord met een logaritme, en als een benadering afgerond op twee decimalen.



Figuur 3.3

Antwoord

De hoeveelheid gas in het luchtschip is $G = 3000 \cdot 0,98^t$ met G in m^3 en t in eenheden van tien dagen.

Los op: $3000 \cdot 0,98^t = 2400$.

$$3000 \cdot 0,98^t = 2400$$

$$0,98^t = 0,8$$

$$t = {}^{0,98} \log (0,8) = \frac{\log (0,8)}{\log (0,98)} \approx 11,05$$

Gebruik hierbij de log-knop van je rekenmachine.

Het luchtschip kan 110 dagen vliegen zonder bijvullen. Op dag 111 kan het luchtschip niet meer vliegen.

Opgave 5

Uit een luchtschip met een inhoud van 3000 m^3 vervliegt per tien dagen 4% van het gas.

Na hoeveel dagen is de inhoud van het luchtschip verminderd tot 2800 m^3 ?

- Stel de vergelijking voor dit probleem op en vereenvoudig deze zo ver mogelijk.
- Geef de oplossing van de vergelijking als logaritme. Geef ook een benadering afgerond op twee decimalen.

Opgave 6

Een hoeveelheid bacteriën neemt per dag met 20% toe.

- Bepaal de bijbehorende groeifactor.
- Een bioloog wil weten na hoeveel dagen het aantal bacteriën is verdubbeld. Stel de vergelijking voor dit probleem op en vereenvoudig deze vergelijking zo ver mogelijk.
- Schrijf de oplossing van de vergelijking als een logaritme en beantwoord daarmee de vraag.

Voorbeeld 2

De luchtdruk varieert met de hoogte boven het zeeniveau. Er geldt:

$$p = 1013 \cdot 10^{-0,065h}$$

Hierin is:

- p de druk in hectopascal
- h de hoogte in km boven zeeniveau

In deze formule wordt het standaard grondtal 10 gebruikt, de groeifactor is niet onmiddellijk zichtbaar. Hoe kun je aan deze formule zien dat er van exponentiële afname sprake is? Bereken de bijbehorende halveringshoogte, de hoogte waarin de luchtdruk wordt gehalveerd.

Antwoord

Je kunt de formule schrijven als $p = 1013 \cdot (10^{-0,065})^h$.

De groeifactor is dus $10^{-0,065} \approx 0,86$.

Deze groeifactor is kleiner dan 1 en dus is er van exponentiële afname sprake.

De halveringshoogte vind je uit $10^{-0,065h} = 0,5$.

Dit betekent: $-0,065h = \log(0,5) \approx -0,301$ (standaard grondtal 10).

En dus wordt de halveringshoogte: $h \approx \frac{-0,301}{-0,065} \approx 4,63$ km.

Opgave 7

Bekijk de formule voor de luchtdruk p (in hectopascal) als functie van de hoogte h (in km) in [Voorbeeld 2 op pagina 24](#).

- De groeifactor is $10^{-0,065}$. Waarom kun je al meteen aan het negatiefteken zien dat er sprake is van exponentiële afname?
- Waarom is het gebruik van het standaardgrondtal 10 handig?
- Op welke hoogte is nog maar een kwart van de luchtdruk op zeeniveau over?
- Op welke hoogte is nog maar éénvijfde van de luchtdruk op zeeniveau over?

Opgave 8

Voor een bacteriekolonie geldt: $B = 4 \cdot 1,5^t$.

Hierin is B het aantal bacteriën en t de tijd in uren.

- Laat met je rekenmachine zien, dat $1,5 = 10^{\log(1,5)} \approx 10^{0,176}$.
- Laat hiermee zien dat de formule voor de bacteriegroei kan worden geschreven als $B = 4 \cdot 10^{0,176t}$.
- Vanaf welk tijdstip zijn er meer dan 150 bacteriën?
Gebruik de formule bij b.

Oefenen

Opgave 9

Een hoeveelheid bacteriën groeit volgens de formule $B = 3 \cdot 7^t$ waarin t de tijd in uren is en B de hoeveelheid bacteriën.

- Bereken in twee decimalen nauwkeurig met behulp van logaritmen na hoeveel uur er 6000 bacteriën zijn.
- Bereken in twee decimalen nauwkeurig de verdubbelingstijd van de bacteriegroei.

Opgave 10

Schrijf de oplossing van de vergelijkingen als logaritme. Geef daarna indien nodig een benadering in één decimaal.

- a $10 \cdot 10^x = 0,1$
- b $0,5 \cdot 2^x = 30$
- c $54 \cdot 0,8^t = 27$

Opgave 11

Een kolonie bacteriën groeit exponentieel met groeifactor 2 per uur.

Bereken in minuten nauwkeurig hoelang het duurt voordat de kolonie zich heeft verdrievoudigd. Maak bij de berekening gebruik van een logaritme.

Opgave 12

Omstreeks 1650 groeide de wereldbevolking met een percentage van 0,3% per jaar.

Geef de verdubbelingstijd als logaritme en geef een benadering in gehele jaren.

Opgave 13

Een radioactieve stof vervalst volgens deze formule: $N = N_0 \cdot 0,93^t$

N is de hoeveelheid in milligram en t de tijd in jaar.

N_0 is de hoeveelheid op $t = 0$.

- a Bereken de halveringstijd. Rond af op twee decimalen.
- b Een laboratorium heeft 400 gram van deze stof. Bereken met behulp van de halveringstijd hoelang het duurt voordat deze hoeveelheid minder is geworden dan 50 gram. Rond af op één decimaal.
- c Bereken tot op een maand nauwkeurig hoelang het duurt voordat 50 gram van deze stof minder is geworden dan 10 gram.

Toepassen

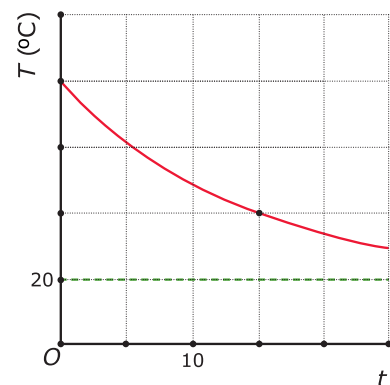
Deze grafiek geeft het afkoelen weer van een kop thee. Daarvoor geldt volgens de warmtewet van Newton dat het temperatuurverschil met de omgeving elke tijdseenheid met een vast percentage afneemt.

De temperatuurmeting begint op $t = 0$ als de thee een temperatuur van 80°C heeft, een temperatuurverschil van 60°C met de omgeving. Dat de omgevingstemperatuur 20°C is, wordt door de asymptoot van de grafiek aangegeven.

Er geldt: $T = 60 \cdot 0,93^t + 20$.

Hierin is:

- T de temperatuur in $^\circ\text{C}$
- t de tijd in minuten



Figuur 3.4

Opgave 14: Afkoelende thee

Bekijk de formule voor de afkoelende thee.

- a Bereken op welk tijdstip de thee kouder is dan $30\text{ }^{\circ}\text{C}$.
Geef je antwoord als logaritme en in minuten nauwkeurig.
- b Het verschil van T en de omgevingstemperatuur neemt exponentieel af.
Bereken de halveringstijd die daarbij hoort.

Opgave 15: Opwarmend water

Water uit de koelkast heeft een temperatuur van $6\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Als het uit de koelkast komt, warmt het langzaam op naar kamertemperatuur van $20\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Ook in dit geval geldt de warmtewet van Newton, dus bij de opwarming neemt het temperatuurverschil met omgeving exponentieel af.

Iemand meet dat het water 5 minuten nadat het uit de koelkast is gehaald een temperatuur van $15\text{ }^{\circ}\text{C}$ heeft.

Na hoeveel minuten is het water warmer dan $18\text{ }^{\circ}\text{C}$?

Geef je antwoord als logaritme en benaderd in minuten nauwkeurig.

Testen

Opgave 16

Los de volgende vergelijkingen op. Schrijf de oplossing als logaritme en geef daarna een benadering in twee decimalen nauwkeurig.

- a $6 \cdot 4^x = 35$
- b $1050 \cdot 1,08^t = 1800$

Opgave 17

In een tank zit 150 liter verontreinigde vloeistof. Deze vloeistof wordt verwijderd door spoelen met water. Hierdoor verdwijnt elke minuut 15% van de vloeistof. Men wil stoppen met spoelen als er minder dan 10 liter verontreinigde vloeistof over is.

Bereken hoe lang men moet spoelen. Schrijf het antwoord als logaritme en geef een benadering van deze logaritme.

3.4 Logaritmische functies

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- werken met logaritmische functies;
- vergelijkingen met logaritmen oplossen met behulp van exponenten.

Voorkennis

- werken met exponentiële functies, ook met GeoGebra of een grafische rekenmachine;
- werken met logaritmen en enkele eigenschappen ervan;
- exponentiële vergelijkingen oplossen met behulp van logaritmen.

Verkennen

Opgave V1

Een logaritmische functie heeft een formule zoals $y = \log(x)$.

Het grondtal van deze logaritme is 10, dus je kunt deze grafiek vergelijken met die van $y = 10^x$.

- Maak de grafiek van deze functies in één figuur.
- Je ziet dat beide grafieken erg op elkaar lijken, ze zijn elkaars spiegelbeeld. In welke lijn moet je dan spiegelen?
- Welke asymptoten hebben de beide grafieken?
- Laat met een paar getallenvoorbeelden zien, dat $\log(10^x) = x$ en dat $10^{\log(x)} = x$.

Uitleg

Bekijk de applet.

Je ziet hier de grafieken van $y = \log(x)$ en $y = 10^x$. Ze zijn elkaars spiegelbeeld in de lijn $y = x$.

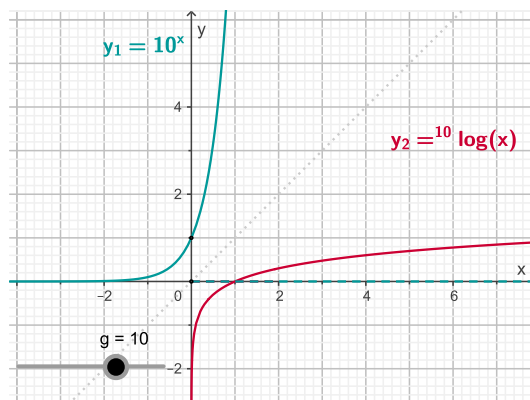
$y = \log(x)$ is een logaritmische functie met:

- nulpunt bij $x = 1$;
- een stijgende grafiek;
- verticale asymptoot $x = 0$.

Je kunt er alleen positieve x -waarden invullen.

Je ziet dat de eigenschappen $y = \log(x)$ het spiegelbeeld zijn van die van $y = 10^x$.

Ze zijn elkaars terugrekenfunctie: $\log(10^x) = x$ en $10^{\log(x)} = x$.



Figuur 3.1

Voor logaritmische functies met andere grondtallen geldt $y = {}^g \log(x) = \frac{\log(x)}{\log(g)}$.

Ze hebben daarom dezelfde eigenschappen als $y = \log(x)$.



Opgave 1

Bekijk de grafieken van $y_1 = 10^x$ en $y_2 = \log(x)$.

- a Het punt (10,1) ligt op de grafiek van y_2 . Welk punt op de grafiek van y_1 is het spiegelbeeld van dit punt bij spiegeling in de lijn $y = x$?
- b Noem nog twee punten op de grafiek van y_2 en geef voor beide punten het bijbehorende spiegelbeeld op de grafiek van y_1 .
- c Laat met een voorbeeld zien dat y_1 en y_2 elkaars terugrekenfunctie zijn.
- d Los op $\log(x) \leq 3$.
Houd rekening met de x -waarden die je in een logaritme mag invullen.

Opgave 2

Bekijk de grafieken van $y_1 = 2^x$ en $y_2 = {}^2\log(x)$.

- a Maak beide grafieken.
- b Het punt (4,2) ligt op de grafiek van y_2 . Welk punt op de grafiek van y_1 is het spiegelbeeld van dit punt bij spiegeling in de lijn $y = x$?
- c Noem nog twee punten op de grafiek van y_2 en geef voor beide punten het bijbehorende spiegelbeeld op de grafiek van y_1 .
- d Los op ${}^2\log(x) \leq 3$.
- e Laat zien, dat $y = {}^2\log(x) \approx 3,32 \cdot \log(x)$.

Opgave 3

Plot de grafieken van $y_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ en $y_2 = {}^{\frac{1}{2}}\log(x)$.

De eigenschappen van y_2 kun je afleiden uit die van y_1 .

- a Welke asymptoot heeft de grafiek van y_2 ?
- b Voor welke waarde van x is $y_2 = 2$?
- c Los op ${}^{\frac{1}{2}}\log(x) \leq 3$.
- d Laat zien, dat $y = {}^{\frac{1}{2}}\log(x) \approx -3,32 \cdot \log(x)$.

Theorie en voorbeelden

Om te onthouden

Bekijk de applet.

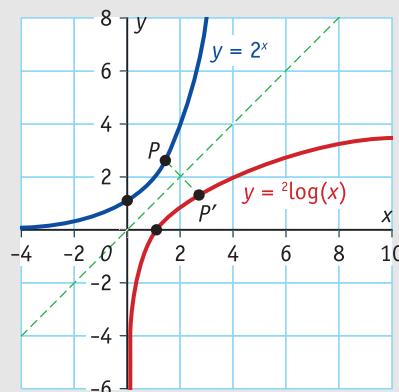
Een functie van de vorm $y = {}^g \log(x)$ heet een **logaritmische functie**.

g is het grondtal. Er moet gelden: $g > 0$ en $g \neq 1$

De grafieken van de functies $y = g^x$ en $y = {}^g \log(x)$ zijn elkaars **terugrekenfunctie** en elkaars spiegelbeeld in de lijn $y = x$.

De karakteristieken van $y = {}^g \log(x)$ zijn af te leiden uit die van $y = g^x$:

- alleen x -waarden boven 0 zijn toegestaan;
- als $g > 1$ is de grafiek stijgend, als $0 < g < 1$ dalend
- de y -as is de verticale asymptoot van de grafiek



Figuur 3.2

Alle functies die door transformatie uit $y = {}^g \log(x)$ kunnen ontstaan, heten logaritmische functies.

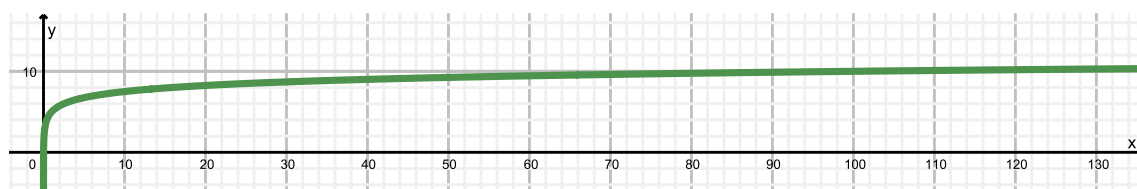
Voorbeeld 1

Gegeven is de logaritmische functie $y = 2,5 \cdot \log(x) + 5$.

Maak de grafiek van deze functie en los op $y \leq 10$.

Antwoord

De grafiek zie je hier.



Figuur 3.3

$2,5 \cdot \log(x) + 5 = 10$ los je zo op:

$$2,5 \cdot \log(x) + 5 = 10$$

$$2,5 \cdot \log(x) = 5$$

$$\log(x) = 2$$

$$x = 10^2 = 100$$

- beide zijden -5
- beide zijden delen door $2,5$
- beide zijden exponentiële functie met grondtal 10

In de grafiek zie je dat de oplossing van de ongelijkheid is $0 < x \leq 100$.



Opgave 4

Bekijk in **Voorbeeld 1 op pagina 29** gegeven functie.

- a Welke asymptoot heeft deze functie?
Welke waarden van x mag je er invullen?
- b Voor welke waarden van x is $y \leq 0$?

Opgave 5

Gegeven is de functie $y = 3 \cdot 2^{\log(x)} - 1$.

- a Laat zien dat deze functie te schrijven is als $y \approx 9,97 \cdot \log(x) - 1$.
- b Los op: $3 \cdot 2^{\log(x)} - 1 \leq 4$. Geef een benadering in twee decimalen.

Voorbeeld 2

In een luchtballon kun je de hoogte bepalen door de luchtdruk te meten met een barometer. In het gebied waar de ballon vliegt geldt bij een gegeven temperatuur op de grond:

$$h = 57 - 19 \cdot \log(p)$$

Hierin is:

- p de luchtdruk in hectopascal
- h de hoogte in km boven zeeniveau

Er wordt een luchtdruk van ongeveer 920 hPa gemeten.
Op welke hoogte zit de ballon dan?

Hoe groot is de luchtdruk als je hoger dan 1 km zit?

Antwoord

$p = 920$ invullen geeft $h = 57 - 19 \cdot \log(920) \approx 0,688$ km.

Als je hoger dan 1 km zit, geldt: $57 - 19 \log(p) > 1$.
De bijbehorende vergelijking kun je oplossen: $p \approx 886$.
Dus de luchtdruk is dan lager dan 886 hPa.

Opgave 6

Bekijk de logaritmische functie in het **Voorbeeld 2 op pagina 30**.

- a Laat zien hoe je $57 - 19 \log(p) > 1$ oplost.
- b Hoeveel bedroeg de luchtdruk op de begane grond?

Opgave 7

Een andere formule voor het berekenen van de hoogte h in km afhankelijk van de luchtdruk p in hPa is:

$$h = 0,886 \log\left(\frac{p}{1013}\right)$$

- a Laat zien dat je dit kunt schrijven als $h \approx -19 \cdot \log\left(\frac{p}{1013}\right)$.
- b Hoeveel bedraagt de luchtdruk op de begane grond?
- c Op welke hoogte wordt de luchtdruk in dit gebied lager dan 900 hPa?



Oefenen

Opgave 8

Een logaritmische functie is gegeven door $y = 2 \cdot \log(x) - 2,5$.

- a Maak de grafiek van deze functie.
- b Welke verticale asymptoot heeft de grafiek?
- c Los op: $y \leq 0$.

Opgave 9

Gegeven is de formule $h = 32,8 \cdot 0,9 \log\left(\frac{p}{1050}\right)$.

Herleid deze formule tot een formule met een logaritme met het standaardgrondtal 10.

Opgave 10

Lichtgevoeligheid van fotografisch opnamemateriaal wordt uitgedrukt in een gevoeligheidsgetal. Het meest gebruikte systeem hiervoor is het ISO/ASA-systeem. Vroeger werd vaak een ander gevoeligheidsgetal gebruikt, de DIN-waarde. Het verband tussen ISO en DIN wordt gegeven door de formule:

$$y = 1 + a \cdot \log(x)$$

Hierin geeft x de lichtgevoeligheid in ISO aan en y de lichtgevoeligheid in DIN. Een film van 100 ISO heeft een DIN-waarde van 21.

- a Bereken a .
- b Maak de bijbehorende grafiek. Laat x lopen tot 1500.
- c Welke ISO-waarde heeft een film met een gevoeligheid van 31 DIN?

Opgave 11

Vliegtuigen veroorzaken in de buurt van vliegvelden veel geluidsoverlast. In milieuwetten is vastgelegd welke geluidsbelasting (hoeveel geluid) nog toegestaan is. Door deze wetten worden de groeimogelijkheden van het vliegverkeer beperkt.

In deze opgave nemen we aan dat alle vliegtuigen hetzelfde geluidsniveau hebben. Dit geluidsniveau geven we aan met L . De waarde van L bepaalt hoeveel vliegtuigen jaarlijks maximaal mogen passeren. Dit maximale aantal noemen we N . Voor een gebied in de buurt van vliegveld Zuidwijk gold aan het eind van de vorige eeuw de voorwaarde:

$$20 \cdot \log(N) = 202 - \frac{4}{3}L$$

Door het gebruik van nieuwe technieken neemt het geluidsniveau L van vliegtuigen af.

- a In een zekere periode nam L af van 75 dB naar 70 dB. Toon door berekening aan dat N in die periode meer dan verdubbelde.
- b Bereken de maximale waarde van L waarbij er een half miljoen (500000) vliegtuigen mogen passeren.

In 2001 werd een nieuwe milieuwet van kracht. Voor het gebied in de buurt van vliegveld Zuidwijk geldt sindsdien:

$$20 \cdot \log(N) = 248 - 2L$$

De oude en de nieuwe formule leverden in 2001 dezelfde waarde van N op.

- c Bereken welke waarde L in 2001 had.



Toepassen

In de jaren vijftig deed de Amerikaan D.L. Gerlough onderzoek naar de voetgangersveiligheid van wegen. Als er veel verkeer over een weg gaat, is er voor voetgangers weinig gelegenheid om veilig over te steken. Daarom stelde Gerlough de zogenaamde "veilige norm" op. Een weg voldoet aan deze veilige norm wanneer er zich gemiddeld elke minuut een gelegenheid voordoet om veilig over te steken. Dat lukt alleen als het aantal auto's dat per uur passeert onder een maximum blijft.

Dit maximum wordt $N_{\max}$ genoemd en hangt af van de breedte van de weg. Bij een brede weg duurt het oversteken langer dan bij een smalle weg. Voor wegen die voldoen aan de veilige norm, betekent dit dat er bij een brede weg per uur minder auto's mogen passeren dan bij een smalle weg. Gerlough kwam tot de volgende formule:

$$N_{\max} = \frac{8289,3(1,778 - \log(B))}{B}.$$

Hierin is B de breedte van de weg in meters.

Vanzelfsprekend is deze formule een model van de werkelijkheid. Met behulp van dit model kun je enig inzicht krijgen in de veiligheid bij de aanleg van wegen.

Opgave 12

Bekijk de formule van Gerlough voor het maximale aantal passerende auto's om voetgangers de gelegenheid te geven veilig over te steken.

- a Een weg is 5,40 meter breed. Tijdens de spits passeren er 1740 auto's per uur. Voldoet deze weg aan de veilige norm? Licht je antwoord toe.
- b De formule van Gerlough heeft alleen betekenis als $N_{\max}$ positief is. Bereken voor welke waarden van B dit het geval is. Geef je antwoord in centimeters nauwkeurig.

Opgave 13

Een weg waarover volgens de veilige norm per uur maximaal 1648 auto's mogen passeren, wordt 0,50 meter smaller gemaakt. Dit heeft tot gevolg dat het maximum aantal auto's dat per uur mag passeren groter wordt.

Bereken hoeveel auto's er per uur méér mogen passeren in de nieuwe situatie.

Testen

Opgave 14

Een logaritmische functie is gegeven door $y = 3 - 0,5 \cdot \log(x)$.

- a Maak de grafiek van deze functie.
- b Welke verticale asymptoot heeft de grafiek?
- c Los op: $y \geq 0$.

**Opgave 15**

Het verband tussen de (gemiddelde) lengte L in cm en het (gemiddelde) gewicht G in kg voor kinderen tussen 6 en 13 jaar wordt gegeven door de formule

$$L = k \cdot \log\left(\frac{G}{G_0}\right)$$

De constanten G_0 en k hangen af van de leefomstandigheden. Voor de westerse wereld geldt $G_0 = 2,4$ (in één decimaal nauwkeurig).

Mark (8 jaar) en Helen (10 jaar) wonen in Nederland en zijn wat lengte en gewicht betreft gemiddelde Nederlandse kinderen.

- a** Mark heeft een lengte van 1,30 m en weegt 26,3 kg. Bereken k in gehele nauwkeurig.
- b** Helen is 1,40 m lang. Schat haar gewicht in kg.

3.5 Logaritmische schalen

Inleiding

Je leert in dit onderwerp

- met logaritmische schalen en logaritmisch grafiekenpapier te werken;
- de formule van een exponentiële functie op te stellen vanaf enkellogaritmisch papier.

Voorkennis

- werken met exponentiële en logaritmische functies, ook met GeoGebra of een grafische rekenmachine;
- werken met logaritmen en enkele eigenschappen ervan;
- vergelijken met exponentiële en logaritmische functies oplossen.

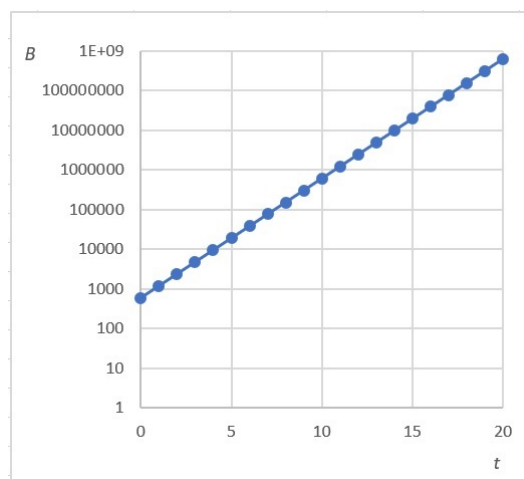
Verkennen

Opgave V1

Bij bacteriegroei in een petrischaaltje kan het verloop van het geschatte aantal bacteriën B worden gegeven door de formule $B = 600 \cdot 2^t$ met t in uren en $t = 0$ om 12:00 uur.

Hier zie je een grafiek van B als functie van t . Op de verticale as is een bijzondere schaalverdeling gebruikt.

- Wat is er voor bijzonders aan die schaalverdeling?
- Teken zelf eens zo'n schaalverdeling op de verticale as en maak de grafiek van B als functie van t .



Figuur 3.1

Uitleg

Als je de getallen 1, 10, 100 en 1000 op een getallenlijn wilt zetten, zie je dat de kleinere getallen erg dicht bij elkaar liggen en niet te onderscheiden zijn.

In plaats van een lineaire schaalverdeling zoals 0,1,2,3,4,..., kun je dan een schaalverdeling met machten van 10: $10^0, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4, \dots$ gebruiken. Dit heet een logaritmische schaalverdeling.

Bekijk de grafiek. Op de B -as is zo'n schaalverdeling gebruikt. Dit is de grafiek van een bacteriegroei. Het verloop van het aantal bacteriën B in gram wordt gegeven door de exponentiële formule:

$$B = 6 \cdot 2^t \text{ met } t \text{ in uren en } t = 0 \text{ om 12:00 uur.}$$

Het getal dat je in de grafiek wilt zetten, moet dus worden 'vertaald' naar een macht van 10. Daarvoor neem je de 10-logaritme van het getal. Bijvoorbeeld:

- Op $t = 12$ zijn er $B = 6 \cdot 2^{12} = 24576$ bacteriën.
- $\log(24576) \approx 4,39$ dus 24576 kun je schrijven als $10^{4,39}$.
- Dan kun je het getal in het logaritmische assenstelsel zetten.

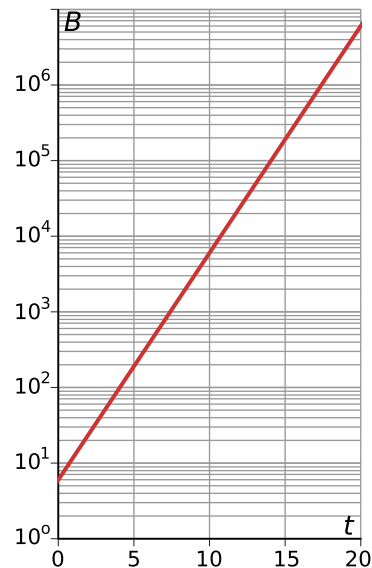
Door de horizontale hulplijnen in het assenstelsel is deze omrekening niet meer nodig.

Je weet dat 24576 tussen $10^4 = 10000$ en $10^5 = 100000$ komt te liggen.

De eerste lijn boven 10^4 stelt $2 \cdot 10^4 = 20000$ voor.

De tweede lijn boven 10^4 stelt $3 \cdot 10^4 = 30000$ voor.

Het getal 24576 ligt tussen deze lijntjes in (recht boven $t = 12$).



Figuur 3.2

Gebruik je op de verticale as een logaritmische schaal en op de horizontale as een lineaire schaal, dan wordt de grafiek van een exponentiële functie een rechte lijn.

Er bestaat voor dit soort grafieken speciaal **enkellogaritmisch papier**. Ook in Excel kun je gemakkelijk grafieken met een logaritmische schaal maken.

Opgave 1

In de **Uitleg op pagina 35** is een grafiek van de exponentiële functie $B = 6 \cdot 2^t$ getekend. Op de B -as is een logaritmische schaalverdeling gebruikt.

- Laat zien dat de punten die horen bij $t = 5$ en $t = 10$ goed zijn getekend.
- De tweede horizontale lijn boven 10^2 stelt 300 voor. Laat zien dat dit op de juiste hoogte is getekend.
- Maak een tabel voor B uitgezet tegen t .
Teken daarmee zelf de grafiek op enkellogaritmisch papier.

Opgave 2

Gegeven is de functie $y = 2 \cdot 3^x$.

- Teken op enkellogaritmisch papier een bijpassende grafiek. Neem $0 \leq x \leq 7$.
- Lees uit de laatste grafiek af hoe groot de y -waarde bij $x = 5,5$ is en controleer het antwoord met de gegeven formule.

Theorie en voorbeelden

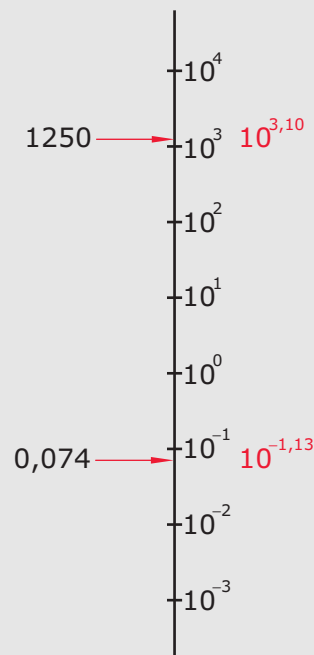
Om te onthouden

Bij een **logaritmische schaalverdeling** plaats je machten van 10 op gelijke afstanden van elkaar. Je kunt dan zowel heel kleine als heel grote getallen plaatsen. Met behulp van de knop logaritme op de rekenmachine kun je snel vinden welke macht van 10 bij een bepaald getal hoort.

- $\log(1250) \approx 3,10$
Je plaatst 1250 op 3,10 eenheden boven 10^0 , dat is tussen 10^3 en 10^4 .
- $\log(0,074) \approx -1,13$
Je plaatst 0,074 op 1,13 eenheden onder 10^0 , dat is tussen 10^{-1} en 10^{-2} .

Gebruik je op de verticale as een logaritmische schaal en op de horizontale as een gewone lineaire schaal, dan wordt de grafiek van een exponentiële functie een rechte lijn. Er bestaat speciaal **enkellogaritmisch papier** dat bestaat uit een as met een logaritmische schaalverdeling.

Omdat een rechte lijn op enkellogaritmisch papier de grafiek is van een exponentiële functie, kun je dat papier gebruiken om na te gaan of er tussen twee variabelen een exponentieel verband bestaat. Bij de grafiek kun je in dat geval een bijpassende formule opstellen.



Figuur 3.3

Voorbeeld 1

Zet op de logaritmische schaal de getallen 7250 en 0,002 uit. Lees ook af welke waarden a en b hebben.

Antwoord

Reken eerst de getallen 7250 en 0,002 om.

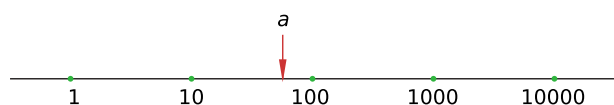
- $\log(7250) \approx 3,86$ en hieruit volgt $7250 \approx 10^{3,86}$
Plaats 7250 op 3,86 eenheden boven 10^0 , dat is tussen 10^3 en 10^4 .
- $\log(0,002) \approx -2,70$ en hieruit volgt $0,002 \approx 10^{-2,70}$
Plaats 0,002 op 2,70 eenheden onder 10^0 , dat is tussen 10^{-2} en 10^{-3} .

Lees nu af:

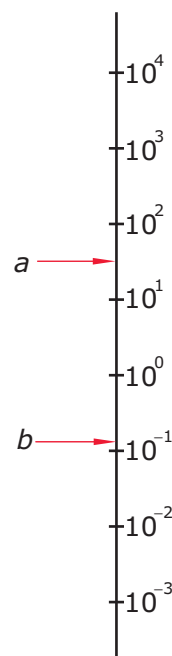
- $a \approx 10^{1,5} \approx 32$
- $b \approx 10^{-0,9} \approx 0,13$

Opgave 3

Lees het getal a op deze logaritmische schaal af.



Figuur 3.5



Figuur 3.4



Opgave 4

Teken een logaritmische schaal met waarden van 10^{-6} tot 10^7 .

- Geef de getallen 20, 20000 en 0,02 op deze schaal aan.
- Een mens is ongeveer 1,80 meter groot. Geef dit getal op je schaalverdeling aan. Neem aan dat de schaal in meters is gegeven.
- De Mount Everest is ongeveer 8884 meter hoog. Geef dit getal op je schaalverdeling aan.
- Een amoëbe is een ééncellig organisme met een afmeting van 0,003 tot 0,8 millimeter. Geef deze getallen op je schaalverdeling aan.
- Op de schaalverdeling is a het getal dat midden tussen 10^3 en 10^4 in zit. Bereken a in gehelen.

Voorbeeld 2

Jodium-131 is een onstabiele radioactieve en zeer gevaarlijke stof. Jodium-131 komt van nature niet op aarde voor, maar is wel vrijgekomen tijdens de kernrampen in Tsjernobyl en Fukushima. Ook wordt Jodium-131 geproduceerd in een kernreactor om het te kunnen gebruiken in de nucleaire geneeskunde ter behandeling van onder andere schildklierkanker. Jodium-131 heeft als eigenschap dat het ‘vervalt’, er verwijnt steeds een beetje van de stof.

Bekijk de vervaltabel van Jodium-131.

<i>tijd (dagen)</i>	0	2	4	6	8	10	12	14	16
<i>hoeveelheid (μ g)</i>	400	336	282	238	202	166	142	116	98

Tabel 3.1

Teken bij deze tabel een grafiek op **enkellogaritmisch papier** en onderzoek of er sprake is van exponentiële groei (verval).

Antwoord

$400 = 4 \cdot 10^2$; het eerste punt komt bij het derde streepje boven 10^2 .

$$336 = 3,36 \cdot 10^2$$

$$282 = 2,82 \cdot 10^2$$

$$238 = 2,38 \cdot 10^2$$

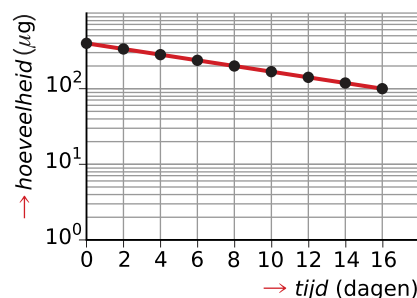
$$202 = 2,02 \cdot 10^2$$

$$166 = 1,66 \cdot 10^2$$

$$142 = 1,42 \cdot 10^2$$

$$116 = 1,16 \cdot 10^2$$

$$98 = 9,8 \cdot 10^1$$



Figuur 3.6

Er is sprake van exponentiële groei, want de punten van de grafiek liggen (bij benadering) op een rechte lijn.



Opgave 5

Bekijk de twee vervaltabellen met daarin de hoeveelheid M van stof M en de hoeveelheid P van stof P in microgram (μg).

t (h)	1	4	16	64
M (μg)	1000	250	62,5	15,6

t (h)	0	24	48	72
P (μg)	1000	250	62,5	15,6

Figuur 3.7

Onderzoek met behulp van grafieken op **enkellogaritmisch papier** of er sprake is van exponentiële groei.

Opgave 6

Maak een assenstelsel met op de verticale as een logaritmische schaalverdeling, of gebruik **enkellogaritmisch papier**. Gegeven is nu de functie $N = 12000 \cdot 0,8^t$.

- Teken de grafiek van N in het assenstelsel of op het enkellogaritmische papier.
- Lees uit de figuur de waarden van t af waarvoor $N < 3000$. Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

Voorbeeld 3

Bekijk de grafiek van de groei van een waterplant.

De oppervlakte A (m^2) is een functie van de tijd t (weken). Stel een bijpassende formule op.

Antwoord

De grafiek is een rechte lijn met alleen op de verticale as een logaritmische schaal. Er bestaat daarom een exponentieel verband tussen A en t : $A = b \cdot g^t$

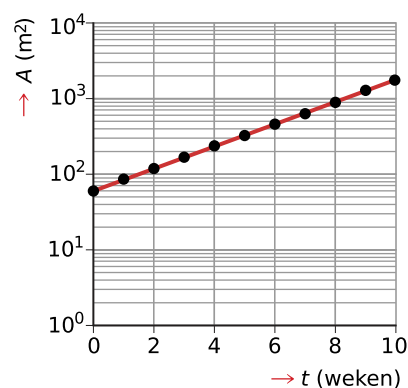
Lees uit de figuur af:

- bij $t = 0$ hoort $A \approx 6 \cdot 10^1 \approx 60$.
- bij $t = 8$ hoort $A \approx 9 \cdot 10^2 \approx 900$.

De groeifactor per 8 weken is ongeveer $\frac{900}{60}$.

De groeifactor per week is ongeveer: $\left(\frac{900}{60}\right)^{\frac{1}{8}} \approx 1,4$

De formule is: $A \approx 60 \cdot 1,4^t$



Figuur 3.8

Opgave 7

In het **Voorbeeld 3 op pagina 38** zie je een rechte lijn in een assenstelsel waarvan de verticale as een logaritmische schaal heeft. Daarbij kun je een functievoorschrift opstellen van de vorm $A = b \cdot g^t$.

- Lees de waarden af voor A bij $t = 5$ en $t = 7$.

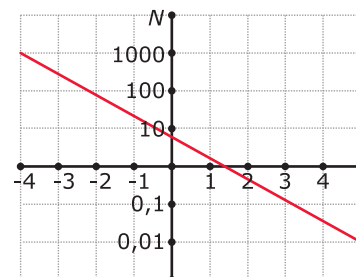


- b** Stel met behulp van deze waarden een formule voor A op.
Ga na dat je ongeveer dezelfde formule vindt als in het voorbeeld.
- c** Waarom is het handiger om de waarde bij $t = 0$ te gebruiken?

Opgave 8

Bekijk deze grafiek van N als functie van t .

- a** Welke coördinaten heeft het snijpunt van de horizontale en verticale as?
- b** Lees twee waarden voor N uit de grafiek af en stel een formule op voor N .
- c** Bereken ter controle met de formule van b het snijpunt met de getekende t -as.
- d** Waarom heeft het geen nut om te vragen naar de t -waarden waarvoor $N = 0$?



Figuur 3.9

Oefenen

Opgave 9

De bevolking van een middelgrote stad groeit vanaf 1 januari 2010 met (ongeveer) 6% per jaar. Op 1 januari 2010 zijn er 80000 inwoners.

- a** Stel een formule op voor het aantal inwoners A afhankelijk van de tijd t in jaren vanaf 1 januari 2010.
- b** Teken een bijpassende grafiek op enkellogaritmisch papier.
- c** Lees uit die grafiek het aantal inwoners af op 1 januari 2025. Controleer je antwoord met behulp van de formule.

Opgave 10

Bekijk de tabel die bij gegevens over een bacteriecultuur hoort.
 t is gegeven in uren en N in aantallen.

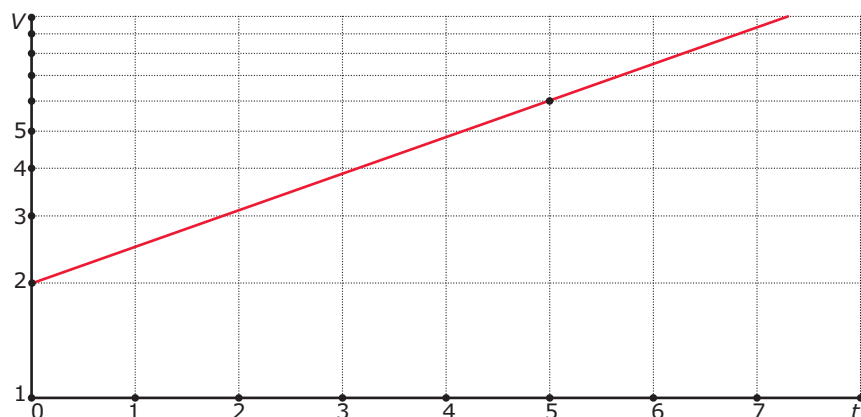
t	0	1	2	3	4	5	6
N	50	84	141	237	398	670	1125

Tabel 3.2

- a** Maak met behulp van de gegeven tabel een grafiek N uitgezet tegen t op enkellogaritmisch papier. Is er sprake van exponentiële groei?
- b** Stel een formule op voor N als functie van t .
- c** Bereken N als $t = 10$ uur.

Opgave 11

Op enkellogaritmisch papier is de grafiek getekend van een toenemende hoeveelheid V als functie van de tijd t .



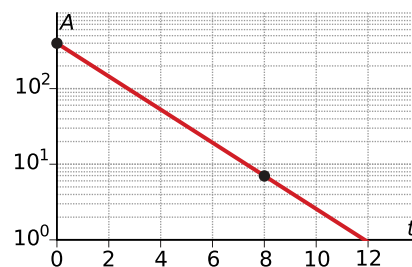
Figuur 3.10

- Geef een formule voor V .
- Bereken in twee decimalen de waarde van t waarvoor $V = 10$. Controleer je antwoord met de grafiek.
- De grafiek lijkt op het enkellogpapier een snijpunt met de t -as te hebben. Bereken de bijbehorende waarde van t in twee decimalen.

Opgave 12

Op enkellogaritmisch papier is de grafiek getekend van een afnemende hoeveelheid A als functie van de tijd t .

- Geef een formule voor A .
- Bereken in twee decimalen de waarde van t waarvoor $A = 20$. Controleer je antwoord met de grafiek.
- De grafiek lijkt op het enkellogpapier een snijpunt met de t -as te hebben. Bereken de bijbehorende waarde van t in twee decimalen.

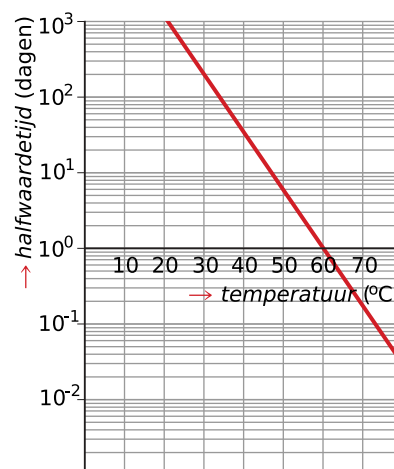


Figuur 3.11

Opgave 13

Honing bestaat grotendeels uit vocht en suikers en voor een klein gedeelte uit andere stoffen, zoals enzymen en mineralen. De kwaliteit van honing hangt onder andere af van de concentratie van het enzym diastase: hoe meer diastase, hoe beter de kwaliteit van de honing. De concentratie van diastase in honing wordt aangeduid met het diastasegetal.

Door het bewaren van honing gaat er diastase verloren en neemt dus het diastasegetal af. De snelheid waarmee dat gebeurt, hangt af van de temperatuur waarbij de honing wordt bewaard. Een maat waarmee de afname van het diastasegetal kan worden weergegeven, is de zogeheten halfwaardetijd. Dat is de tijd waarin het diastasegetal wordt gehalveerd. Bekijk de grafiek waarin deze halfwaardetijd is uitgezet tegen de temperatuur waarbij de honing wordt bewaard.



Figuur 3.12

- Wat is beter: honing bewaren bij een lage temperatuur of bij een hoge temperatuur? Licht je antwoord toe en maak daarbij gebruik van de grafiek.

Het diastasegetal is bij de meeste soorten honing direct na winning niet hoger dan 30.

Als het diastasegetal lager is dan 8, mag de honing alleen nog maar als bakkershoning worden verkocht.

Een bepaald type honing heeft bij winning een diastasegetal van 28.

Deze honing wordt gedurende drie jaar bewaard bij een temperatuur van 25 °C.

Ga ervan uit dat de afname van het diastasegetal exponentieel verloopt.

- b Laat met behulp van de grafiek zien dat deze honing na drie jaar bakkershoning is geworden.

Soms versuikert honing. Er ontstaan dan suikerkorrels op de bodem van een pot honing.

Versuikerde honing wordt weer vloeibaar door de honing te verhitten.

Uit de grafiek blijkt dat het diastasegetal wordt gehalveerd als honing 24 uur lang op een temperatuur van 60 °C wordt gehouden.

Een partij honing met een diastasegetal van 27 wordt gedurende een bepaalde tijd op een temperatuur van 60 °C gehouden. Ga er nog steeds van uit dat de afname van het diastasegetal exponentieel verloopt.

- c Bereken hoelang het duurt totdat deze partij bakkershoning is geworden.

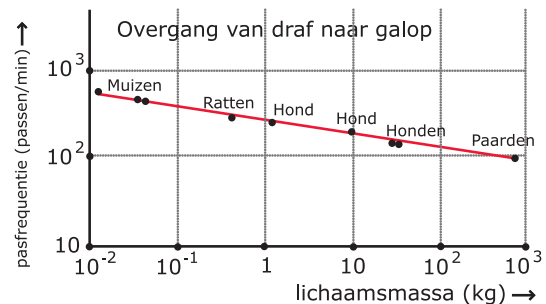
Toepassen

Zoogdieren gaan bij een bepaalde pasfrequentie (het aantal passen per minuut) over van draf naar galop. De pasfrequentie waarbij dat gebeurt hangt af van de lichaamsmassa.

Noem de lichaamsmassa m (in kilogram) en de pasfrequentie P .

De rechte lijn gaat door de punten die horen bij een kleine hond en bij paarden.

Op beide assen is nu een logaritmische schaal gebruikt.



Figuur 3.13

Daardoor hoort bij deze rechte lijn een formule van de vorm $\log(P) = a \cdot \log(m) + b$.

Dit kun je herleiden tot $P = 10^b \cdot m^a$, zodat P een machtsfunctie is van m .

Opgave 14

Bekijk de grafiek van de pasfrequentie P afhankelijk van de lichaamsmassa m in kg.

- Waar kun je aan zien dat op beide assen van deze grafiek een logaritmische schaal is gebruikt?
- Welke pasfrequentie en welke lichaamsmassa horen bij 'kleine hond'?
- Welke pasfrequentie en welke lichaamsmassa horen bij 'paard'?

Opgave 15

De grafiek in [Toepassen op pagina 41](#) kan worden benaderd met de formule $P = 259 \cdot m^{-0,14}$.

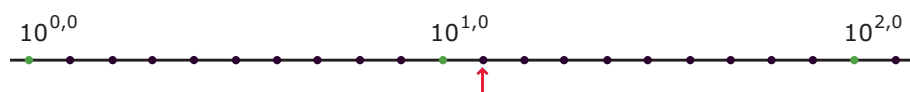
- Laat zien dat de waarden die je in de vorige opgave hebt afgelezen voor 'kleine hond' en 'paard' hieraan voldoen.
- Het gewicht van een savanneolifant is gemiddeld 6000 kg. Bij welke pasfrequentie gaat deze olifant van draf naar galop?



Testen

Opgave 16

Teken een getallenlijn met een logaritmische schaalverdeling (neem deze figuur over).



Figuur 3.14

- a Welk getal hoort bij het pijltje?
- b Teken een pijltje dat hoort bij het getal 2.
- c Geef aan waar 5,5 en waar $10^{0,5}$ moeten staan. Doe dit ook bij 55 en $10^{1,5}$.
- d Geef ook $3\frac{1}{4}$ en $10^{\frac{1}{4}}$ aan.

Opgave 17

Bij een biologisch experiment groeit in een vijver een waterplant. De waterplant bedekt een steeds groter deel van het wateroppervlak. Elke week meet men de oppervlakte die de waterplant bedekt. De meetwaarden staan in de tabel.

aantal weken	0	1	2	3	4	5	6
oppervlakte (dm ²)	40	57	89	134	200	305	447

Tabel 3.3

- a Zet de punten (0,40),(1,57),..., (6,447) uit op enkellogaritmisch papier.
- b Trek door deze punten zo goed mogelijk een rechte lijn.
- c Van welk type groei is hier sprake? Waar zie je dat aan?
- d Stel een formule op voor de oppervlakte A die de waterplant bedekt, afhankelijk van de tijd t in weken.

3.6 Totaalbeeld

Samenvatten

In dit onderwerp heb je gewerkt met exponenten en logaritmen en heb je met name gewerkt aan situaties waarin exponentiële groei of exponentieel verval belangrijk is. Je hebt de eigenschappen van exponentiële en logaritmische functies leren kennen. En je hebt gewerkt met logaritmische schalen en logaritmisch grafiekenpapier.

Je hebt nu alle theorie van **Exponenten en logaritmen** doorgewerkt. Er moet een totaalbeeld van deze leerstof ontstaan... Ga na, of je al de bij dit onderwerp horende begrippen kent en weet wat je ermee kunt doen. Ga ook na of je de activiteiten die staan genoemd kunt uitvoeren. Maak een eigen samenvatting!

Begrippenlijst

- exponentiële groei en lineaire groei — groeifactor
- exponentiële functie — horizontale asymptoot — verdubbelingstijd en halveringstijd
- logaritme — verveelvoudigingstijd
- logaritmische functie — terugrekenfunctie
- logaritmische schaal — enkellogaritmisch grafiekenpapier

Activiteitenlijst

- exponentiële groei en lineaire groei vergelijken — de groeifactor vaststellen bij exponentiële groei — groeifactoren omrekenen;
- een exponentiële functie herkennen — horizontale asymptoot herkennen — bijbehorende vergelijkingen grafisch oplossen — verdubbelingstijd, halveringstijd berekenen;
- logaritme gebruiken om een exponentiële vergelijking op te lossen — eigenschappen van logaritmen benoemen — logaritmen berekenen met behulp van de rekenmachine;
- een logaritmische functie herkennen — grafieken van logaritmische functies maken — vergelijkingen met logaritmen oplossen door terugrekenen met een exponentiële functie met hetzelfde grondtal;
- logaritmische schalen aflezen — grafieken tekenen op enkellogpapier — formule opstellen van een exponentiële functie op enkellogpapier.

Testen

Opgave 1

Paracetamol is het wereldwijd meest gebruikte pijnstillende en koortsverlagende middel. Het wordt onder andere verkocht in pillen van 500 mg. Na inname in het lichaam (een pilletje paracetamol slikken) wordt deze stof ook weer langzaam afgebroken. De halveringstijd is (afhankelijk van de omstandigheden) ongeveer 3 uur.

- Hoeveel uur na inname is nog 12,5% van de paracetamol in het lichaam over?
- Hoeveel bedraagt de groeifactor per uur in drie decimalen nauwkeurig? En het afnamepercentage per uur?

Als de hoeveelheid paracetamol in je lichaam onder de 50 gram is, gaat er geen werking meer van uit.

- Je slikt twee paracetamolpillen van 500 gram. Na hoeveel uur zijn ze uitgewerkt?



Figuur 3.1

Opgave 2

Samoa is een republiek in Polynesië die bestaat uit de westelijke Samoa-eilanden. In 2006 bedroeg het aantal inwoners volgens een officiële volkstelling 179186. N is het aantal inwoners van Samoa afgerond op honderdtallen en t is de tijd in jaren vanaf 2006.

Het aantal inwoners werd voor het jaar 2012 geschat op 194300.

- Als je uitgaat van lineaire groei, welke formule kun je dan opstellen voor N afhankelijk van t ?
- Ga na dat bij de gegevens ook exponentiële groei past met een percentage van ongeveer 1,36% per jaar.
- Welke formule geldt voor N afhankelijk van t als je van exponentiële groei uitgaat?
- Bereken voor beide soorten groei in welk jaar het aantal inwoners van Samoa voor het eerst de 200000 zal overschrijden.

Opgave 3

In 2000 was het aantal inwoners van het werelddeel Afrika ongeveer 872 miljoen en in 2010 was dit aantal ongeveer 1138 miljoen. Het aantal inwoners groeide exponentieel.

Azië had in 2000 meer inwoners, namelijk 3864 miljoen, maar het groeipercentage was 1,5% per jaar.

In welk jaar zal - mits de groei zo door gaat - het aantal inwoners van Afrika dat van Azië gaan overstijgen? Schrijf de bijbehorende ongelijkheid op.

Opgave 4

Een pakje boter wordt in de koelkast geplaatst. Daardoor daalt de temperatuur van de boter. Neem aan dat voor die temperatuur geldt $T = 14 \cdot 0,8^t + 6$, met t in minuten en T in °C.

- Hoeveel bedroeg de temperatuur van de boter voordat ze in de koelkast werd geplaatst?
- Hoeveel bedraagt de temperatuur in de koelkast?
- Maak een grafiek van T als functie van t .
- Bereken na hoeveel minuten de temperatuur van de boter minder dan 1 °C van de temperatuur binnen de koelkast verschilt.

Opgave 5

De luchtdruk p in millibar hangt af van de hoogte h (kilometer) boven het zeeniveau. Bij benadering geldt:

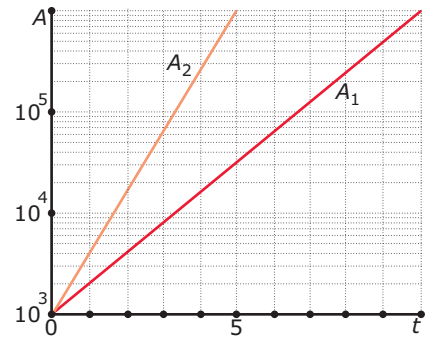
$$h = -15 \cdot \log\left(\frac{p}{p_0}\right)$$

waarin p_0 de luchtdruk op zeeniveau voorstelt.

- Neem aan dat $p_0 = 1010$ millibar. Maak de grafiek van h als functie van p .
In een vliegtuig wordt een luchtdruk van 400 millibar gemeten. De luchtdruk op zeeniveau is op dat moment 1010 millibar.
- Bereken hoe hoog het vliegtuig vliegt.
- Neem aan dat $p_0 = 1010$. Druk p uit in h . Rond waar nodig af op drie decimalen.
De bemanning van een vliegtuig gaat uit van 1000 millibar op zeeniveau en berekent dat het vliegtuig zich op 3 kilometer hoogte bevindt. De luchtdruk op zeeniveau is echter 1030 millibar.
- Hoe hoog bevindt het vliegtuig zich in werkelijkheid? Rond af op meters.

Opgave 6

In een laboratorium is onderzocht hoe de toename van het aantal bacteriën in 10 gram salade afhankelijk is van de temperatuur. Bekijk in de grafiek de resultaten bij een temperatuur van 0 en bij een temperatuur van 4 graden Celcius. Bij een hogere temperatuur groeit het aantal bacteriën sneller.



Figuur 3.2

- Van hoeveel bacteriën is bij het onderzoek uitgegaan?
- Geef zowel voor A_1 als A_2 de formule van het aantal bacteriën A na t dagen.
- Bereken hoeveel keer zo veel bacteriën er na tien dagen bij 4 °C zijn vergeleken met de situatie bij 0 °C.
- Bereken hoeveel de verdubbelingstijd bij een koeling bij 4 °C bedraagt.

Toepassen

Opgave 7: Zuurgraad

In de scheikunde wordt het begrip ‘zuurgraad’ gebruikt om aan te geven of een bepaalde oplossing meer of minder zuur of basisch is. De zuurgraad wordt voorgesteld door pH en weergegeven op een logaritmische schaal.

De zuurgraad is een maat voor de concentratie waterstofionen in mol per liter. Je geeft die concentratie aan met $[H_3O^+]$. In een neutrale oplossing is de concentratie waterstofionen: $[H_3O^+] = 10^{-7}$ mol/L. De zuurgraad is dan 7. Dit getal is het tegengestelde van de logaritme van 10^{-7} : $pH = -\log(10^{-7}) = 7$. Onder de zuurgraad van een bepaalde stof versta je: $pH = -\log[H_3O^+]$.

- Bij geconcentreerd zwavelzuur is $[H_3O^+] = 18$ mol/L. Hoeveel bedraagt de zuurgraad?
- Huishoudammonia (verdunde ammonia) heeft een zuurgraad van 11,5. Hoeveel bedraagt de H_3O^+ -concentratie in mol/L?
- Zure regen heeft een pH-waarde van 4. Hoeveel bedraagt de H_3O^+ -concentratie van zure regen?
- Vanaf welke H_3O^+ concentratie is de zuurgraad negatief? Is de oplossing dan heel zuur of juist niet?
- De aanduiding pH-neutraal op cosmetische producten betekent iets anders dan een pH van 7. Het geeft aan dat het product een pH heeft die overeenkomt met de natuurlijke pH van de huid. De natuurlijke pH van de huid is ongeveer 5,5. Hoeveel bedraagt de H_3O^+ -concentratie dan?

Opgave 8: C-14 methode

In levende organismen komt behalve het radioactieve koolstof C-14 ook het niet-radioactieve C-12 voor. Gelukkig is de verhouding van de hoeveelheid C-14 ten opzichte van C-12 zeer klein. Deze verhouding is constant $1 : 10^{12}$. Wanneer een organisme sterft verandert de verhouding door radioactief verval van C-14. Door de verhouding te meten kan de ouderdom van resten organisch materiaal berekend worden. De halveringstijd van C-14 is 5730 jaar.

- Een archeoloog vindt een bot waarvan de verhouding C-14 : C-12 gelijk is aan $1 : 10^{13}$. Hoeveel jaar is dat bot ongeveer oud?
- Bij een Egyptische mummie blijkt de verhouding van C-14 en C-12 ongeveer 0,65 keer de verhouding van C-14 en C-12 in levende organismen te zijn. Benader de ouderdom van deze mummie.



- c In 1947 zijn aan de westzijde van de Dode Zee de Dode-Zeerollen (oudtestamentische handschriften) gevonden. De verhouding van C-14 en C-12 in de perkamenten rollen bleek tussen de 77% en de 81% van die bij levende organismen te zijn. Vanaf hoeveel jaar voor het begin van de jaartelling tot hoeveel jaar erna zijn de Dode-Zeerollen geschreven?
- d Een 4500 jaar oude kist werd in een hunebed (grafkelder in de provincie Drenthe) aangetroffen. Hoe groot is de verhouding van de aangetroffen hoeveelheid C-14 en C-12 ongeveer in vergelijking met die van een houten kist uit onze tijd?



Register

a

asymptoot 14

c

constante functie 3

e

exponentiële functie 14

exponentiële groei 3

g

groeifactoren omrekenen 3

i

inverse functie 29

l

lineaire groei 3

logaritme 22

logaritmische functie 29

logaritmische schaalverdeling 36

v

verdubbelingstijd 14

